平成31年度入試（平成30年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般入試（後期日程）
学部学科等	理学部　数学科
教科・科目名	数学／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備　　考	

$\boxed{1}$ 解答例 (略解)

(1) 加法定理より次の等式 (三角関数の和や差を積に変形する式) を得る。

$$\cos 2t + \cos t = 2\cos\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}, \qquad \sin 2t - \sin t = 2\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}$$

これらを $\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{dy}{dt}$ の計算に適用すれば次が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = \sin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}(\sin 2t - \sin t) = \sin\frac{t}{2} + \cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}\left(1 + \cos\frac{3t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2t + \cos t) = \cos\frac{t}{2} + \cos\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2} = \cos\frac{t}{2}\left(1 + \cos\frac{3t}{2}\right)$$

(2) $\cos\dfrac{t}{2}$ と $1+\cos\dfrac{3t}{2}$ の符号の変化を調べることで以下の y の増減表を得る。

t	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	$\frac{10\pi}{3}$	$\cdots$	4π
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$		$\nearrow$	0

これより，y 座標が最小となるのは $t=3\pi$ のときであり最小値は -2 である。
また，このとき x 座標は $-\dfrac{3}{4}$ である。

答 $\left(-\dfrac{3}{4}, -2\right)$

(3) 曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^{4\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{4\pi}\left(1+\cos\frac{3t}{2}\right)dt = 4\pi$
となる。

答 4π

$\boxed{2}$ 解答例 (略解)

(1) 条件より，与えられた漸化式を変形すれば次の式が得られる。

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{c}{a}(x_{n+1}-x_n)$$

したがって，数列 $\{x_{n+1}-x_n\}$ は，公比 $\dfrac{c}{a}$ の等比数列である。

(2) $y_n=x_{n+1}-x_n$，$r=\dfrac{c}{a}$ とおくと，数列 $\{y_n\}$ の一般項は $y_n=\dfrac{1}{2}r^{n-1}$ となる。ゆえに $n\geqq 2$ のとき，$x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}y_k+x_1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}r^{k-1}+1$ である。

よって，r の値の場合分けにより，x_n は，次のいずれかで表される。

- $r\neq 1$ のとき，　$x_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-r^{n-1}}{1-r}\right)+1\quad(n\geqq 1)$ ……①
- $r=1$ のとき，　$x_n=\dfrac{n-1}{2}+1\quad(n\geqq 1)$ ……②

② の数列 $\{x_n\}$ は，発散する。

① の数列 $\{x_n\}$ は，$|r|<1$ のときに限り，収束する。

したがって，数列 $\{x_n\}$ が収束する為の必要十分条件は $|r|=\left|\dfrac{c}{a}\right|<1$ である。

答 $|c|<|a|$

(3) $r=\dfrac{c}{a}$ とおく。$\{x_n\}$ の一般項は上記の ① で表されるので，その部分和は

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{2(1-r)}\left(n-\frac{1-r^n}{1-r}\right)+n$$

となる。したがって，求める極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{2(1-r)}+1=\frac{3a-2c}{2(a-c)}$$

である。

答 $\dfrac{3a-2c}{2(a-c)}$

$\boxed{3}$ 解答例 (略解)

(1) $r = \dfrac{AP}{BP}$ とおく。C 上の点 P を表す複素数を z とすると，次が得られる。

$$r^2 = \frac{|z-a|^2}{|z-\frac{1}{a}|^2} = \frac{|z|^2 - a(z+\bar{z}) + a^2}{|z|^2 - \frac{1}{a}(z+\bar{z}) + \frac{1}{a^2}} = \frac{1 - a(z+\bar{z}) + a^2}{1 - \frac{1}{a}(z+\bar{z}) + \frac{1}{a^2}} = a^2$$

よって，C 上の点 P の位置によらず $r = a$ が成り立つ。
したがって，比 $AP : BP$ は一定である。

(2) C 上の点 P を表す複素数 z に対して $u = \dfrac{z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}$ とおく。

$z\bar{z} = |z|^2 = 1$ を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{u+\bar{u}}{2} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} + \frac{\bar{z}}{\overline{(z-a)}\overline{(z-\frac{1}{a})}}\right\} \\
&= \frac{\left\{\bar{z} - \left(a+\frac{1}{a}\right) + z\right\} + \left\{z - \left(a+\frac{1}{a}\right) + \bar{z}\right\}}{2|z-a|^2|z-\frac{1}{a}|^2} \\
&= \frac{(z+\bar{z}) - (a+\frac{1}{a})}{|z-a|^2|z-\frac{1}{a}|^2} < 0
\end{aligned}$$

がわかる。最後の不等号は，与えられた実数 a $(0 < a < 1)$ についての不等式 $a + \dfrac{1}{a} > 2$ と，z $(|z| = 1)$ についての不等式 $z + \bar{z} \leqq 2$ の2つを示すことにより得られる。

同様に $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{u-\bar{u}}{2i} &= \frac{1}{2i}\left\{\frac{z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} - \frac{\bar{z}}{\overline{(z-a)}\overline{(z-\frac{1}{a})}}\right\} \\
&= \frac{\left\{\bar{z} - \left(a+\frac{1}{a}\right) + z\right\} - \left\{z - \left(a+\frac{1}{a}\right) + \bar{z}\right\}}{2i|z-a|^2|z-\frac{1}{a}|^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。したがって，u は実部が負で虚部が 0 の複素数，すなわち負の実数である。