平成31年度入試（平成30年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般入試（後期日程）
学部学科等	工学部　工学科電気電子工学・知能情報工学・機械工学コース　都市デザイン学部　都市・交通デザイン学科
教科・科目名	数学／ 数Ｉ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備　　考	

$\boxed{1}$

(1) $y=f(x)=a^{ax}$ とおき，両辺に対数をとる。

$$\begin{aligned}\log_e y &= \log_e a^{ax} \\ &= ax \cdot \log_e a\end{aligned}$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(\log_e y)\cdot\frac{dy}{dx} &= a\log_e a \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= a\log_e a \\ \frac{dy}{dx} &= (a\log_e a)\ y \\ \frac{dy}{dx} &= (a\log_e a)\ a^{ax} \\ &= (\log_e a)\ a^{ax+1}\end{aligned}$$

ゆえに

$$f'(x) = (\log_e a)\ a^{ax+1}$$

(2) 第 1 式より

$$x=\sin\left(\theta+\frac{\theta}{2}\right)=\cos\theta$$

第 2 式より

$$y=2\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\theta \qquad \therefore\ \frac{y}{2}=\sin\theta$$

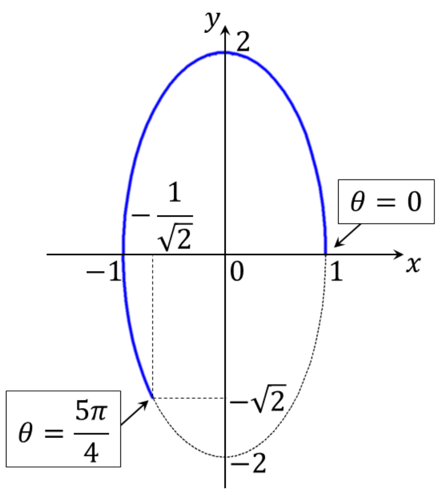

図 1

公式 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より

$$x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$$

となり，図 1 の破線のような楕円の式となる。ここで $0\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$ より，$\theta=0$ のとき $(x,\ y)=(1,\ 0)$ そして $\theta=\frac{5}{4}\pi$ のとき $(x,\ y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2})$ である。軌跡 C は，$\theta=0$ の座標から反時計回りに回転して $\theta=\frac{5}{4}\pi$ までの図 1 青線 となる。

(3)

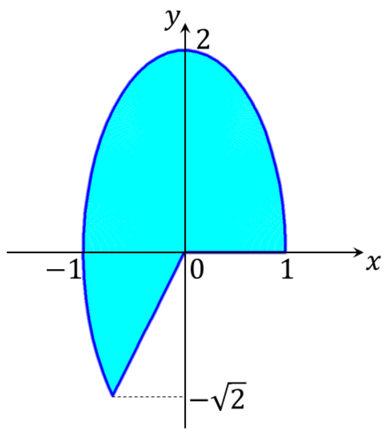

図 2

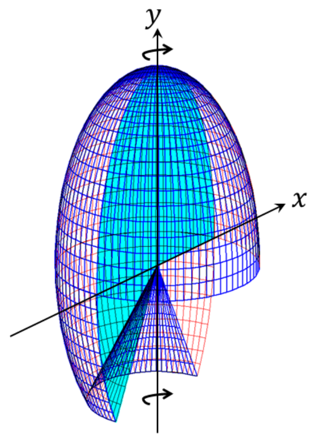

図 3

図形 F は図 2 水色部分となる。また、図形 F を y 軸周りに半回転してできる立体は図 3 のとおりである。この回転体は図 4, 5 のように分けて考えることができる。

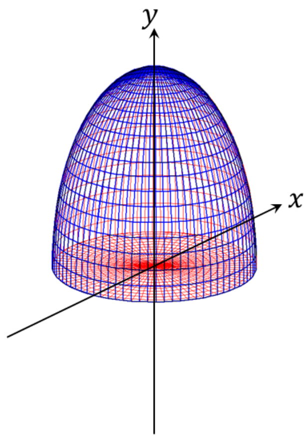

図 4

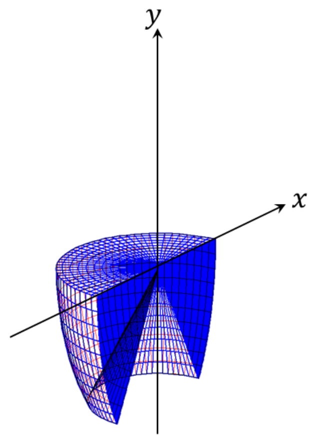

図 5

問 (2) で求めた楕円の方程式は

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

である。

図 4 より，体積 V_1 は半径 x の面の面積 πx^2 を $0 \leqq y \leqq 2$ で積分すれば求められる。

$$V_1 = \pi \int_0^2 x^2 dy = \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi \left[y - \frac{y^3}{12}\right]_0^2 = \pi \left(2 - \frac{8}{12}\right) = \frac{16}{12}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

次に，図 5 の立体について，さらに図 6, 7 のように分けて考えることができる。

図 5 で示される立体の体積 V_2 は，図 6 の立体から 図 7 を減ずることで求められる。図 6 で示される立体の体積 V_{D1} は

$$V_{D1} = \frac{1}{2}\pi \int_{-\sqrt{2}}^0 x^2 dy = \frac{\pi}{2} \int_{-\sqrt{2}}^0 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) dy = \frac{\pi}{2} \left[y - \frac{y^3}{12}\right]_{-\sqrt{2}}^0 = \frac{-\pi}{2} \left(-\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{12}\pi$$

図 2 において $\theta = \frac{5}{4}\pi$ のときの $(x,\ y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$ と原点をつなぐ直線の式は，傾き $a = \frac{-\sqrt{2}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2$ な

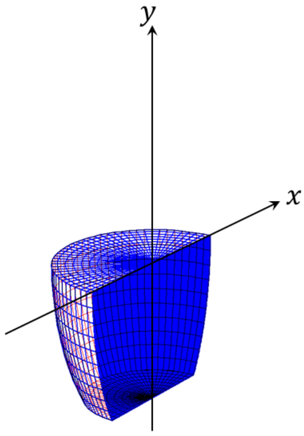

図 6

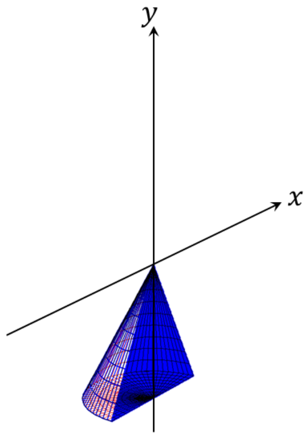

図 7

ので，$y=2x$（または $x=\frac{y}{2}$） となる。図 7 で示される立体の体積 V_{D2} は

$$V_{D2}=\frac{1}{2}\pi\int_{-\sqrt{2}}^{0}x^2dy=\frac{\pi}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{0}\left(\frac{y}{2}\right)^2dy=\frac{\pi}{2}\left[\frac{y^3}{12}\right]_{-\sqrt{2}}^{0}=\frac{\pi}{2}\left\{-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{12}\right)\right\}=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

ゆえに，求める体積 V は

$$V=V_1+(V_{D1}-V_{D2})=\frac{4}{3}\pi+\left(\frac{5\sqrt{2}}{12}\pi-\frac{\sqrt{2}}{12}\pi\right)=\frac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$$

$\boxed{2}$

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，ABC は正三角形となる。AOC は OC : AC : OA $= 1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形，AOD も OD: OA: AD $= 1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形である。OD $= 1$ なので，

$$\text{円錐の高さ:}\quad h = \mathrm{AO} = 2,$$
$$\text{底面円の半径:}\quad r = \mathrm{OC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ゆえに，求める円錐の体積は

$$\frac{\pi}{3} h r^2 = \frac{\pi}{3} \cdot 2 \ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{8}{9}\pi$$

(2)

$$\text{円錐の高さ:}\quad h = \mathrm{AO} = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}},$$
$$\text{底面円の半径:}\quad r = \mathrm{OC} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

円錐の体積は

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{3} h r^2 &= \frac{\pi}{3}\ \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\ \left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2\\ &= \frac{\pi}{3}\ \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\ \frac{1}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}\\ &= \frac{\pi}{3}\ \frac{1}{t}\ \frac{1}{1-t^2}\end{aligned}$$

よって、求める円錐の体積は

$$\frac{\pi}{3}\ \frac{1}{t\,(1-t^2)}$$

(3) $0 < \theta < \pi$ より $0 < t\ (= \sin\frac{\theta}{2}) < 1$ であり，この範囲で円錐の体積 $V(t)$ を最小にする t を考える。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t-t^3}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{-1}{(t-t^3)^2}\left(1-3t^2\right)$$

$0 < t < 1$ では $(t-t^3)^2$ は常に正であり，$(1-3t^2)$ は $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で 0， $t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ で正，$t > \frac{1}{\sqrt{3}}$ で負となることから，$\frac{dV}{dt}$ は $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で負から正に転じる、すなわち，$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で V は最小となり，その値は

$$V_{\min} = \frac{\pi}{3}\ \frac{1}{t\,(1-t^2)} = \frac{\pi}{3}\ \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

(4)

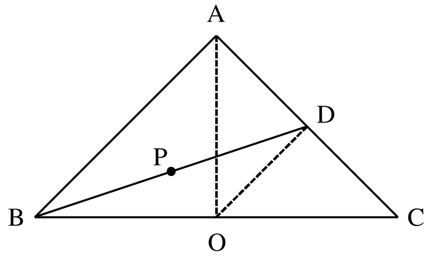

図 8

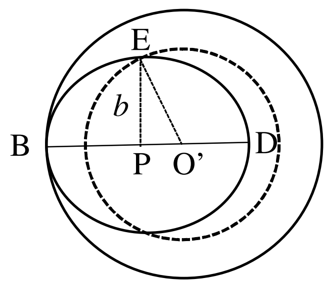

図 9

$\theta=\frac{\pi}{2}$ から，三角形 ABC，ABO，ACO，AOD 等は皆，直角二等辺三角形である。線分 BD は楕円の長軸となり，点 O を原点にとると，B $(-\sqrt{2},\ 0)$，D $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2})$ にある。よって，線分 BD の長さは

$$\mathrm{BD}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{18+2}}{2}=\sqrt{5}$$

楕円の長径を a とすると

$$a=\frac{\mathrm{BD}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

次に，楕円の中心 P は線分 BD の中点は $(-\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4})$ にある，高さ $\sqrt{2}/4$ の水平面で円錐を切った円とその水平面内で P を通り BD に直行する直線が円と交差する点と P の距離が楕円の短径 b となる。高さ $\sqrt{2}/4$ の円錐断面円の半径は

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

よって短径 b は

$$b=\mathrm{EP}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{18-2}}{4}=1$$

ゆえに，求める楕円の面積は

$$\pi ab=\pi\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$$

$\boxed{3}$

(1) 交点は，縦の線を n 本の中から 1 本，横の線を n 本の中から 1 本選ぶことで得られるので

$$P_n = n \times n = n^2$$

縦に n 本の直線があれば $(n-1)$ 個の幅が存在し，そこに横線が 1 本入れば長さ a の線分が $(n-1)$ 個得られるので，横線が n 本入れば $n(n-1)$ 個の長さ a の水平方向の線分が得らえる。鉛直方向の線分も同様に $n(n-1)$ 個なので

$$Q_n = n\ (n-1) \times 2$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

(2) 四角形は，縦の長さを n 本の中から 2 本，横の線を n 本の中から 2 本選ぶことで得られるので

$$R_n = {}_nC_2 \times {}_nC_2 = \left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

縦と横に n 本ずつの直線があれば $(n-1)$ 個ずつの長さ a の幅が存在するので，一辺の長さ ka の選び方は縦横それぞれ $(n-k)$ 通り。よって、以下のような大きさと個数の正方形が得られる。

一辺の長さが a の正方形の数は $(n-1)^2$ 個
一辺の長さが $2a$ の正方形の数は $(n-2)^2$ 個
$\vdots$
一辺の長さが $(n-2)a$ の正方形の数は 2^2 個
一辺の長さが $(n-1)a$ の正方形の数は 1^2 個

よって

$$\begin{aligned} S_n &= (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \end{aligned}$$

$$\frac{S_n}{R_n} = \left\{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\right\} \div \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{2(2n-1)}{3n(n-1)}$$

$$\frac{S_6}{R_6} = \frac{2\ (2\cdot 6-1)}{3\cdot 6\ (6-1)} = \frac{11}{45}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} V_k &= V_2 + V_3 + \cdots + V_n \\ &= a^3 + 8a^3 + 27a^3 + \cdots + (n-1)^3 a^3 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^3 a^3 \\ &= a^3 \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \end{aligned}$$

恒等式の両辺に $\sum$ をつけると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{(k+1)^4-(k-1)^4\right\}=\sum_{k=1}^{n-1}(8k^3+8k)$$

$$n^4+(n-1)^4-1=8\sum_{k=1}^{n-1}k^3+8\ \frac{n(n-1)}{2}$$

$$8\sum_{k=1}^{n-1}k^3=2n^4-4n^3+2n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n-1}V_k=a^3\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}a^3=\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2a^3$$

よって

$$\begin{aligned}（\text{ア}）&=\frac{n(n-1)}{2}\\（\text{イ}）&=a\end{aligned}$$