令和２年度入試（令和元年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般入試（前期日程）
学部学科等	人間発達科学・経済
教科・科目名	数学 ／ 数学（人発・経済）
正解・解答例 又 は 出 題 （面 接）意 図	（解答例）　別紙のとおり
備　　　考	

$\boxed{1}$

略解

(1)　ユークリッド互除法の計算で 97 と 17 の最大公約数 $(97,17)$ を求めると

$$(97,17)=(17,12)=(12,5)=(5,2)=(2,1)=(1,0)=1$$

となる。この際に，以下のような計算をしている

$$\begin{aligned} 97 &= 5\times 17+12 \\ 17 &= 1\times 12+5 \\ 12 &= 2\times 5+2 \\ 5 &= 2\times 2+1 \\ 2 &= 1\times 2 \end{aligned}$$

ここで $a=97$，$b=17$ とし，上記式を整理すると

$$\begin{aligned} 12 &= a-5\times b \\ 5 &= b-1\times(a-5\times b)=-a+6b \\ 2 &= (a-5b)-2\times(-a+6b)=3a-17b \\ 1 &= (-a+6b)-2\times(3a-17b)=-7a+40b \end{aligned}$$

よって，不定方程式 $97x+17y=1$ は $(x,y)=(-7,40)$ を解として持つ。この解を用い，全ての解を求めると

$$\begin{cases} x = -7+17t \\ y = 40-97t \end{cases} \quad (t\in Z) \tag{1}$$

となる。

(2)　与方程式は，絶対値を外して

$$97x+17y=1 \quad (x\leqq\frac{1}{97}) \tag{2}$$

$$97x-17y=1 \quad (\frac{1}{97}\leqq x) \tag{3}$$

である。それぞれの方程式の解において，$50\leqq y\leqq 200$ を満たすものを求めれば良い。方程式 (2) の解については，すでに小問 (1) で得ている解 (1) を用いる。この中で

$$50\leqq 40-97t\leqq 200$$

を満たす整数 t は $t=-1$ であり対応する値の組は

$$x=-24,\quad y=137\quad (t=-1)$$

不定方程式　$97x-17y=1$ は，$(-7,-40)$ が解の一組である。全ての解は

$$\begin{cases} x = -7+17t \\ y = -40-97t \end{cases} \quad (t\in Z)$$

となる。よって方程式 (3) において

$$50\leqq -40-97t\leqq 200$$

を満たす整数 t は $t=-1,-2$ であり対応数する値の組は

$$x=10,\quad y=57\quad (t=-1)$$

$$x=27,\quad y=154\quad (t=-2)$$

よって求める解は

$$(x,y)=\quad(-24,\ 137),\quad(10,\ 57),\quad(27,\ 154)$$

$\boxed{2}$

略解

(1)

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CA}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} + |\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

(2)

（ア）　$\angle\mathrm{ACB} = \theta$ とおく。　条件 $a^2+b^2-c^2=2$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} = 1$$

となる。すなわち

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos\theta = ab\cos\theta = 1$$

今, $ab > 0$ なので $\cos\theta > 0$ である。また $\cos\theta \leqq 1$ であるので

$$ab = \frac{1}{\cos\theta} \geqq 1$$

次に $ab \neq 1$ であることを示す。$ab = 1$ だとすると

$$\cos\theta = 1$$

であり $\theta = 0$ である。これは三角形なのであり得ない。
　よって

$$ab > 1$$

(イ)　今

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$$

である。この左辺に

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{CP}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (s-1)\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

を代入して計算すると

$$s - 1 + ta^2 = 0 \tag{4}$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$$

の左辺に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{CP}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

を代入して計算すると

$$sb^2 + t - 1 = 0 \tag{5}$$

この二式 (4)(5) を連立して s, t について解くと

$$s = \frac{a^2-1}{a^2b^2-1}, \qquad t = \frac{b^2-1}{a^2b^2-1}$$

を得る。

$\boxed{3}$

略解

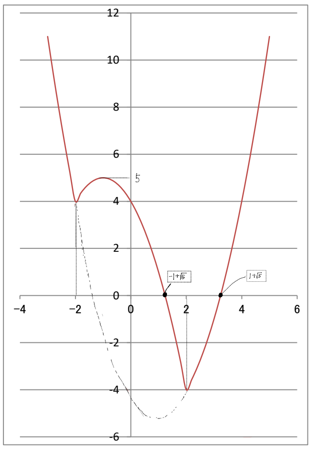
(1)　$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$ の時

$$f(x) = x^2 - 2x - 4 = (x-1)^2 - 5$$

$-2 \leqq x \leqq 2$ の時

$$f(x) = -x^2 - 2x + 4 = -(x+1)^2 + 5$$

であるので，グラフは以下のようになる。



(2)

$$|x^2 - 4| = 2x + k \Longleftrightarrow f(x) = k$$

なので小問 (1) のグラフと $y = k$ の交点を調べればよい。
異なる 4 点で交わるのは $4 < k < 5$ の時である。

(3)　求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1+\sqrt{5}}^{2} (x^2 - 2x - 4)\,dx \\ &\qquad + \int_{2}^{1+\sqrt{5}} (-x^2 - 2x + 4)\,dx \\ &= -\frac{32}{3} + \frac{20}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$

(計算略)。