令和２年度入試（令和元年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般入試（前期日程）
学部学科等	理・医・薬・工・都市デザイン学部
教科・科目名	数学 ／ 数学(理・医・薬・工・都デ)
正解・解答例 又 は 出 題 （面 接）意 図	（解答例）　別紙のとおり
備　　　考	

$\boxed{1}$

略解

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (X, Y, 0)$$

であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= (-1, 0, 2) + t(1, \sin\theta, \cos\theta - 2) \\ &= (t-1,\ t\sin\theta,\ t\cos\theta - 2t + 2)\end{aligned}$$

である。今 Q の z 座標は $= 0$ なので

$$t = \frac{2}{2-\cos\theta}$$

よって

$$X = \frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}, \quad Y = \frac{2\sin\theta}{2-\cos\theta}$$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ なので

$$3 \geqq 2 - \cos\theta \geqq 1$$

であり

$$\frac{2}{3} \leqq \frac{2}{2-\cos\theta} \leqq 2$$

よって $t = X + 1 \neq 0$ なので

$$\cos\theta = \frac{2X}{X+1}$$

と表される。よって

$$\begin{aligned}Y^2 &= t^2\sin^2\theta \\ &= t^2(1-\cos^2\theta) \\ &= (X+1)^2\left(1 - \left(\frac{2X}{X+1}\right)^2\right) \\ &= -3X^2 + 2X + 1\end{aligned}$$

(3)　楕円

$$\frac{9}{4}X^2 + \frac{3}{4}Y^2 = 1$$

を X 軸方向に $\frac{1}{3}$ だけ平行移動した楕円

$$\frac{9}{4}\left(X - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{4}Y^2 = 1$$

の $Y \geqq 0$ 部分となる。

(4)　求める体積を V とおくと

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-\frac{1}{3}}^{1} Y^2\,dX \\ &= \pi\int_{-\frac{1}{3}}^{1} (-3X^2 + 2X + 1)\,dX \\ &= \frac{32}{27}\pi\end{aligned}$$

（計算略）。

$\boxed{2}$

略解

(1)

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geqq 0$$

を示せばよい。実際

$$\begin{aligned}
&2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
&\quad = \quad 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\\
&\quad = \quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

である。最後の等号が成立するのは $a=b=c$ の時。

(2)

$$\begin{aligned}
&\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c}-\frac{a^3-1}{a(a+b+c)}\\
&\quad = \quad \frac{(a^5-a^2)a(a+b+c)-(a^3-1)(a^4+b+c)}{(a^4+b+c)a(a+b+c)}\\
&\quad \geqq \quad 0
\end{aligned}$$

を示せばよい。$a,\ b,\ c,$ は正であるので，この分母は正である。よって真ん中の式の分子に注目し

$$\begin{aligned}
&(a^5-a^2)a(a+b+c)-(a^3-1)(a^4+b+c)\\
&\quad = \quad (a^3-1)a^3(a+b+c)-(a^3-1)(a^4+b+c)\\
&\quad = \quad (a^3-1)\Big(a^4+(b+c)a^3-a^4-(b+c)\Big)\\
&\quad = \quad (a^3-1)(b+c)(a^3-1)\\
&\quad = \quad (a^3-1)^2(b+c) \geqq 0
\end{aligned}$$

a は正の実数なので、最後の等号が成立するのは $a=1$ の時。

(3)

小問 (2) の結果から

$$\begin{aligned}
&\frac{a^5-a^2}{a^4+b+c}+\frac{b^5-b^2}{b^4+c+a}+\frac{c^5-c^2}{c^4+a+b} \qquad (1)\\
&\quad \geqq \quad \frac{a^3-1}{a(a+b+c)}+\frac{b^3-1}{b(a+b+c)}+\frac{c^3-1}{c(a+b+c)}\\
&\quad = \quad \frac{1}{a+b+c}\Big(a^2-\frac{1}{a}+b^2-\frac{1}{b}+c^2-\frac{1}{c}\Big)
\end{aligned}$$

である。次に $abc \geqq 1$ より

$$bc \geqq \frac{1}{a},\ ca \geqq \frac{1}{b},\ ab \geqq \frac{1}{c}$$

よって

$$\begin{aligned}
&a^2-\frac{1}{a}+b^2-\frac{1}{b}+c^2-\frac{1}{c}\\
&\quad \geqq \quad a^2-bc+b^2-ca+c^2-ab \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等号は小問 (1) の結果を用いた。この結果と不等式 (1) をあわせると示せたことになる。

$\boxed{3}$

略解

(1) $\dfrac{x}{t}=s$ とおくと $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{x}{t^2}$ であり

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{1}{t}\log\frac{x}{t}\,dt \\ &= \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} -\frac{1}{s}\log s\,ds \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{1}{s}\log s\,ds \end{aligned}$$

となる。$F(s)$ を $\frac{1}{s}\log s$ の原始関数とすると，

$$g_1(x)=\Big[F(s)\Big]_{\frac{1}{x}}^{x^2}=F(x^2)-F\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

よって

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= F'(x^2)(2x)-F'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\ &= \frac{1}{x^2}\log(x^2)2x+\frac{1}{\frac{1}{x}}\log\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^2} \\ &= 2\frac{1}{x}2\log x-\frac{1}{x}\log x \\ &= 3\frac{\log x}{x} \end{aligned}$$

別解として，最初の置換をしたのちに

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x^2}\frac{1}{s}\log s\,ds \\ &= \Big[\frac{1}{2}(\log s)^2\Big]_{\frac{1}{x}}^{x^2} \\ &= \frac{1}{2}(\log x^2)^2-\frac{1}{2}\Big(\log\frac{1}{x}\Big)^2 \\ &= 2(\log x)^2-\frac{1}{2}(\log x)^2=\frac{3}{2}(\log x)^2 \end{aligned}$$

この得られた結果に対し微分を行い

$$g_1'(x)=3\frac{\log x}{x}$$

などもある。

(2) $F(t)$ を $f(t)$ の原始関数とすると，

$$g_2(x)=\Big[F(t)\Big]_{\frac{1}{x}}^{x^2}=F(x^2)-F\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

よって

$$\begin{aligned} g_2'(x) &= F'(x^2)(2x)-F'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\ &= 2xf(x^2)+\frac{1}{x^2}f\Big(\frac{1}{x}\Big) \end{aligned}$$

(3) $\dfrac{x}{t}=s$ とおくと $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{x}{t^2}$ であり

$$g_3(x)=\int_{x^2}^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{s}f(s)ds=\int_{\frac{1}{x}}^{x^2}\frac{1}{s}f(s)\,ds$$

となる。$F(s)$ を $\frac{1}{s}f(s)$ の原始関数とすると，

$$g_3(x)=\Big[F(s)\Big]_{\frac{1}{x}}^{x^2}=F(x^2)-F\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

よって

$$\begin{aligned} g_3'(x) &= F'(x^2)(2x)-F'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\ &= \frac{1}{x^2}f(x^2)2x+\frac{1}{\frac{1}{x}}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^2} \\ &= 2\frac{1}{x}f(x^2)+\frac{1}{x}f\Big(\frac{1}{x}\Big) \end{aligned}$$

(4)
(ア)　条件より $x>1$ において

$$2xf(x^2)+\frac{1}{x^2}f\Big(\frac{1}{x}\Big)>0 \tag{2}$$

$$2\frac{1}{x}f(x^2)+\frac{1}{x}f\Big(\frac{1}{x}\Big)<0 \tag{3}$$

不等式 (2) の左辺から不等式 (3) の左辺 $\times\frac{1}{x}$ をひいたものは正なので

$$2f(x^2)(x-\frac{1}{x^2})>0$$

$x>1$ においては $x-\frac{1}{x^2}>0$ なので，よって $f(x^2)>0$ がいえる。

(イ)　$x^2=t$ とおくと小問（ア）の結果より $t>1$ の時 $f(t)>0$ がいえる。文字を改めて x で表せば $x>1$ の時 $f(x)>0$ がいえた。次に不等式 (3) と小問（ア）の結果より $x>1$ の時は

$$f\Big(\frac{1}{x}\Big)<-2f(x^2)<0$$

ここで $\frac{1}{x}=s$ とおくと $x>1$ の時，s の取りうる範囲は $0<s<1$ であることから、$0<s<1$ の時 $f(s)<0$ がいえる。文字を改めて x で表せば $0<x<1$ の時 $f(x)<0$ がいえた。

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)\geqq 0$$
$$\lim_{x\to 1-0}f(x)\leqq 0$$

であり，$f(x)$ は連続関数なので $f(1)=0$。よって解は $x=1$。