令和２年度入試（令和元年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般入試（後期日程）
学部学科等	理学部　数学科
教科・科目名	数学 ／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ
正解・解答例 又は出題 （面接）意図	別紙のとおり（略解）
備　　考	

$\boxed{1}$ (1) $x>0$ で, $y=\log_e x$ は増加する. また, $e<4$ より, $e^{\frac{1}{2}}<2$. これより, $\frac{1}{2}=\log_e e^{\frac{1}{2}}<\log_e 2$. 従って, $\log_e 2$ は $\frac{1}{2}$ より大きい.

(2) 実数 x に対して, $f'(x)=2^x\log_e 2-2$, $f''(x)=2^x(\log_e 2)^2$. これより, $f''(x)>0$ となり, $f'(x)$ は増加する. また,

$$f'(2)=4\log_e 2-2=4(\log_e 2-\frac{1}{2})$$

となる. (1) より, $f'(2)>0$. 以上より, $x\geqq 2$ で $f'(x)>0$ となる. 従って, $x\geqq 2$ で $f(x)$ は増加する.

(3) $2^5=32>27=3^3$ より, $2^5>3^3$. ゆえに, $\dfrac{2^5}{3^3}>1$. 両辺に $2^{10}(>0)$ をかけて, $\dfrac{2^{15}}{3^3}>2^{10}$. 従って, $\dfrac{2^5}{3}>2^{\frac{10}{3}}$. これより,

$$2^{\frac{10}{3}}<\frac{2^5}{3}=\frac{2\cdot 10+12}{3}=2\cdot\frac{10}{3}+4$$

書き直すと,

$$f(\frac{10}{3})=2^{\frac{10}{3}}-2\cdot\frac{10}{3}<4$$

以上より, 4 は $f(\frac{10}{3})$ より大きい.

(4) $\pi<\dfrac{10}{3}$ に注意. (2) より, $x\geqq 2$ で $f(x)$ は増加するので, $f(\pi)<f(\frac{10}{3})$. (3) より, $f(\pi)<f(\frac{10}{3})<4$. 従って, 4 は $f(\pi)$ より大きい.

$\boxed{2}$ (1) $f'(x)=-\sin x(2\cos x+1)$. これより, 次の増減表を得る.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

グラフの概形は略.

(2) 方程式 $f(x)=g(x)$ を $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で解いて, $x=\frac{\pi}{4}$ と $x=\frac{3}{4}\pi$ を得る. $\alpha<\beta$ より,

$$\alpha=\frac{\pi}{4},\quad \beta=\frac{3}{4}\pi$$

(3) $g'(x)=\sin x(2\cos x-1)$. これより, 次の増減表を得る.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

$\alpha < x < \beta$ において $0 < f(x) < g(x)$ より，求める体積を V とすると

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx - \pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx$$

となる．これを計算して，$V = 3\pi$.

$\boxed{3}$　(1)　E は ΔOAB の周および内部である．図は略.

(2)　P の座標は

$$s(4,2) + t(1,3) = (4s + t, 2s + 3t) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

とかける．よって，

$h = (4s + t - 2)^2 + (2s + 3t - 5)^2 = 20s^2 + 20st - 36s + 10t^2 - 34t + 29.$

ただし，s, t は $s \geqq 0$, $t \geqq 0$, $s + t \leqq 1$ の範囲を動く．

(3)　$h = 10t^2 + 2(10s - 17)t + 20s^2 - 36s + 29$ として，h を t の 2 次関数と考えると，そのグラフの頂点の t 座標は $\dfrac{1}{10}(17 - 10s)$ であり，

$$\frac{1}{10}(17 - 10s) = \frac{17}{10} - s > 1 - s$$

である．従って，$0 \leqq t \leqq 1 - s$ において h は $t = 1 - s$ のときのみで最小値をとる．以上より，$0 \leqq s \leqq 1$ に対して，

$$m(s) = (4s + (1 - s) - 2)^2 + (2s + 3(1 - s) - 5)^2 = 10s^2 - 2s + 5$$

(4)　s, t が $s \geqq 0$, $t \geqq 0$, $s + t \leqq 1$ の範囲を動くときの h の最小値は，$0 \leqq s \leqq 1$ における $m(s)$ の最小値 m_0 に等しい．$0 \leqq s \leqq 1$ において

$$m(s) = 10(s - \frac{1}{10})^2 + \frac{49}{10}$$

より，$m_0 = \frac{49}{10}$ であり，それを与える s は $s = \frac{1}{10}$ である．(3) より，$t = 1 - s$ のとき h は最小値をとるので，$t = \frac{9}{10}$．以上より，① から

$$\mathrm{Q}(\frac{13}{10}, \frac{29}{10})$$

であることがわかる．