令和２年度入試（令和元年度実施）の情報開示

解答例について

入試の区分	一般入試（後期日程）
学部学科等	工学部　工学科電気電子工学・知能情報工学・機械工学コース　都市デザイン学部　都市・交通デザイン学科
教科・科目名	数学 ／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙1，2，3の通り。
備　　考	

1　関数 $f(x)$ が①の式を満たすとき，以下の問いに答えよ。ただし，a は実数とする。

$$\int_a^x f(t)dt = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad ①$$

(1) $f(x)$ を求めよ。

両辺を x で微分すると　$f(x) = 3x^2 - 12x + 11$　となる。

(2) ①が成り立つ a の値をすべて求めよ。

① の x に a を代入すると左辺は　$\int_a^a f(t)dt = 0$　となる。したがって①の右辺は

$a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0$ となる。これを因数分解すると

$$a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = (a-1)(a-2)(a-3) = 0$$

よって　$a = 1, 2, 3$ となる。

(3) ②の式を満たす実数 b, c, d の値を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(t)$ の導関数とする。

$$\int_x^{x+b} f(t)dt = xf'(x) + cx + d \qquad \cdots\cdots ②$$

上記(1)より$f(x) = 3x^2 - 12x + 11$ なので，$f'(x) = 6x - 12$ である。これを②に代入すると

$$\begin{aligned}\int_x^{x+b} f(t)dt &= xf'(x) + cx + d \\ &= 6x^2 - 12x + cx + d \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

ここで左辺を積分する。上記(1)より$f(x) = 3x^2 - 12x + 11$ なので

$$\begin{aligned}\int_x^{x+b} f(t)dt &= \int_x^{x+b} (3t^2 - 12t + 11)dt \\ &= [t^3 - 6t^2 + 11t]_x^{x+b} \\ &= \{(x+b)^3 - x^3\} - 6\{(x+b)^2 - x^2\} + 11\{(x+b) - x\} \qquad \cdots\cdots ④ \\ &= 3bx^2 + (3b^2 - 12b)x + (b^3 - 6b^2 + 11b).\end{aligned}$$

よって③＝④なので，$6x^2 + (c - 12)x + d = 3bx^2 + (3b^2 - 12b)x + (b^3 - 6b^2 + 11b)$ となる。両辺の係数をそれぞれ比較して $b = 2, c = 0, d = 6$ となる。

$\boxed{2}$ xy 平面上に，$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で表される曲線 C があるとき，以下の問いに答えよ。

(1) C と x, y 軸との交点の座標をすべて求めよ。

x 軸との交点の座標は $y=0$ を代入することで求められる。

$$(\sqrt{2}, 0),\ (-\sqrt{2}, 0)$$

y 軸との交点は $x=0$ であるから，同様にして次のように得られる。

$$(0, 2),\ (0, -2)$$

(2) 直線 $y=x+1$ と C の交点の座標をすべて求めよ。

C の方程式に $y=x+1$ を代入することで次式を得る。

$$3x^2+2x-3=0$$

この二次方程式の解が交点の x 座標値である。y 座標値は直線の方程式に x 座標値を代入することで得られる。

$$\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3}, \frac{2+\sqrt{10}}{3}\right),\ \left(\frac{-1-\sqrt{10}}{3}, \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right)$$

(3) C の接線のうち，点 $(2, 0)$ を通る直線の方程式をすべて求めよ。

求める接線の方程式を $y=mx+n$ とする。この直線は点 $(2, 0)$ を通ることから，

$$n=-2m$$

となる。したがって，直線の方程式 $y=mx-2m$ を曲線 C の方程式に代入すると，

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(mx-2m)^2}{4}=1$$

$$\left(2+m^2\right)x^2-4m^2x+4m^2-4=0$$

が得られる。直線と曲線が接するとき，重解を持つことから，

$$4m^4-\left(2+m^2\right)\left(4m^2-4\right)=0$$

$$m^2=2$$

$$m=\pm\sqrt{2}$$

である。ゆえに，求める接線は次のように得られる。

$$y=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2},\quad y=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$$

(4) C で囲まれる領域のうち，$x \geqq 1$ の部分の面積を求めよ。

求める領域の面積を S とすると，

$$S = 2\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4-2x^2}\mathrm{d}x$$

となる。ここで，$x = \sqrt{2}\cos\theta$ とすると，

$$\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\sqrt{4-2x^2} = \sqrt{4-4\cos^2\theta} = 2\sqrt{1-\cos^2\theta} = 2\sin\theta$$

また，$x = 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{4}$，$x = \sqrt{2}$ のとき $\theta = 0$ である。したがって，面積 S は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} S &= -4\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= [2\sqrt{2}\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\sqrt{2}\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \sqrt{2} \end{aligned}$$

3 漸化式 $a_{n+1}-a_n=r(1-a_{n+1})a_n$, $(n=0,1,2,\cdots)$ があるとき，以下の問いに答えよ。ただし，定数 r と初項 $a_0=a$ は正とする。

(1) a_{n+1} を a_n と r で表せ。

(2) 一般項 a_n が次式で与えられることを証明せよ。

$$a_n=\frac{a(1+r)^n}{1-a+a(1+r)^n}$$

(3) $0<a<1$ のとき，a_n が n の増加に伴って単調に増加することを証明せよ。

(1) 漸化式を a_{n+1} について解いて

$$a_{n+1}=\frac{1+r}{1+ra_n}a_n$$

(2) 与式において，

- $n=0$ のとき
$$a_1=\frac{(1+r)^1}{1-a+a(1+r)^1}a=\frac{1+r}{1+ar}a$$
となり成立
- a_k のとき，成立すると仮定する。
- $n=k+1$ のとき，
$$a_{k+1}=\frac{1+r}{1+ra_k}a_k=\frac{(1+r)^{k+1}}{1-a+(1+r)^k+ar(1+r)^k}a=\frac{(1+r)^{k+1}}{1-a+a(1+r)^{k+1}}a$$
よって，成立する。

(3) 任意の n に対して単調増加するには，$a_{n+1}-a_n>0$ であるから， $0<a_n<1$ であれば漸化式右辺が正になる。$a_n<0$ で $a_{n+1}>1$ でも $a_{n+1}-a_n>0$ になるが，$n=0$ のとき，$a>0$ なので不成立。よって，

$$0<a_n<1$$

であればよい。$n=0$ のとき，
$$a_1=\frac{1+r}{1+ra}a$$

$0<a<1$ であるから，$\frac{1+r}{1+ra}>1$，従って，$a_1>a$ となる。$a<1$ であるから，$a_1-1=\frac{1+r}{1+ra}a-1=\frac{a-1}{1+ra}<0$ となって，$0<a_1<1$ が成立する。
$n=k$ のとき，$0<a_k<1$ が成立するとして，$n=k+1$ では

$$a_{k+1}=\frac{1+r}{1+ra_k}a_k$$

$0<a_k<1$ であるから，$\frac{1+r}{1+ra}>1$ なので，$a_{k+1}>a_k$ 。また，

$$a_{k+1}-1=\frac{1+r}{1+ra_k}a_k-1=\frac{a_k-1}{1+ra_k}$$

$0<a_k<1$ より，$a_{k+1}<1$ となるので，$a_{k+1}-a_k>0$ が成立する。従って，n の増加に伴い，a_n は単調に増加する。