令和３年度入試（令和２年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程）
学部学科等	人間発達科学・経済学部
教科・科目名	数学 ／ 数学(人発・経済)
正解・解答例 又は出題 (面接)意図	（解答例） 別紙のとおり
備考	

略解

$\boxed{1}$

(1)

すべての 0 以上の整数は適当な 0 以上の整数 k を用いて，

$$6k, \quad 6k+1, \quad 6k+2, \quad 6k+3, \quad 6k+4, \quad 6k+5$$

の形で表現することができる．$6k=2\cdot 3k$，$6k+2=2\cdot(3k+1)$，$6k+3=3\cdot(2k+1)$，$6k+4=2\cdot(3k+2)$ より，この中で p が 3 より大きい素数ならば，

$$p=6k+1 \text{ または } p=6k+5$$

と表現することができる．条件より，$p+4$ も素数であるので，p の表現は $p=6k+1$ に限られる．実際，$p=6k+5$ ならば，

$$p+4=6k+9=3\cdot(2k+3)$$

となり，$p+4$ は 3 の倍数となる．したがって，p を 6 で割った余りは 1 である．

(2)

(1) より，$p=6k+1$（$k \geqq 1$）と表現することができるので，

$$p+2=6k+3=3\cdot(2k+1)$$

となる．したがって，$p+2$ は 3 の倍数である．

(3)

(1) より，$p=6k+1$（$k \geqq 1$）と表現することができるので，

$$(p+1)(p+2)(p+3)=2^2\cdot 3\cdot(2k+1)(3k+1)(3k+2)$$

$(3k+1)(3k+2)$ は隣り合う 2 数の積なので偶数である．すなわち，ある自然数 l が存在し，

$$(3k+1)(3k+2)=2l$$

と表すことができる．したがって，$(p+1)(p+2)(p+3)$ は 24 の倍数である．また，p，$p+1$，$p+2$，$p+3$，$p+4$ は連続する 5 つの整数なので，このうち 1 つは 5 を素因数に持つが，p，$p+4$ は素数で $p\neq 5$ より，$p+1$，$p+2$，$p+3$ のいずれかが 5 の倍数となる．以上より，$(p+1)(p+2)(p+3)$ は $2^3\cdot 3\cdot 5=120$ の倍数であることが示された．

略解

$\boxed{2}$

(1)

接点の座標を $(\alpha, \alpha^3-\alpha)$ とおくと，接線の方程式は

$$y=(3\alpha^2-1)x-2\alpha^3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で表される．この直線が $\mathrm{P}(1,p)$ を通るので

$$p=-2\alpha^3+3\alpha^2-1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

をみたす．

$$g(\alpha)=-2\alpha^3+3\alpha^2-1$$

とおくと，

$$g'(\alpha)=-6\alpha^2+6\alpha$$

となる．曲線 $\beta=g(\alpha)$ と直線 $\beta=p$ の共有点の個数が $\mathrm{P}(1,p)$ から C へ引ける接線の本数である．増減表は次のようになる．

α	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$

したがって，

$p<-1$ のとき 1 本

$p=-1$ のとき 2 本

$-1<p<0$ のとき 3 本

である．

(2)(a)

(1) より $p=-1$ であるので P の座標は $(1,-1)$ である．②に $p=-1$ を代入すると

$$0=\alpha^2(3-2\alpha)$$

よって，$\alpha=0,\ \dfrac{3}{2}$ が得られる．$\mathrm{Q}(0,0)$ を通る接線の方程式は①より

$$y=-x$$

$\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{8}\right)$ を通る接線の方程式は①より

$$y=\frac{23}{4}x-\frac{27}{4}$$

したがって求める接線の方程式は $y=-x$ と $y=\dfrac{23}{4}x-\dfrac{27}{4}$ である。

(b)

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^1\left\{(x^3-x)-(-x)\right\}dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\left\{(x^3-x)-\left(\frac{23}{4}x-\frac{27}{4}\right)\right\}dx\\
&=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{27}{8}x^2+\frac{27}{4}x\right]_1^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{27}{64}
\end{aligned}$$

したがって，$S=\dfrac{27}{64}$ である．

略解

$\boxed{3}$

(1)

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}x^2 + b_{n+1}x + c_{n+1} &= \int_2^x \{(a_n + b_n)t + n\}\,dt \\
&= \frac{a_n + b_n}{2}x^2 + nx - 2(a_n + b_n + n) \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

①がすべての実数 x とすべての正の整数 n で成立するので

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \cdots\cdots ② \\
b_{n+1} &= n \qquad \cdots\cdots ③ \\
c_{n+1} &= -2(a_n + b_n + n) \qquad \cdots\cdots ④
\end{aligned}
$$

が成り立つ．③より，$b_n = n - 1$ である．

(2)

②と $b_n = n - 1$ より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{n-1}{2}$$

$$\therefore \quad a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}$$

$d_1 = a_2 - a_1 = 1/2$ であることと

$$d_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(d_n - 1)$$

であることから

$$d_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が得られる．

(3)

⑤より

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geqq 1)$$

よって $n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} \\
&= -1 + (n-1) - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= n - 3 + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \cdots\cdots ⑥
\end{aligned}
$$

$a_1 = -1$ なのでこの式は $n = 1$ のときも成り立つ.

(4)

③④⑥より,

$$c_{n+1} = -2\left(3n - 4 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (n \geqq 1)$$

よって,

$$c_n = 14 - 6n - 2^{3-n}$$

$c_1 = 4$ なのでこの式は $n = 1$ の時も成り立つ.