令和３年度入試（令和２年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程）
学部学科等	人間発達科学・経済・理・医・薬・工・都市デザイン学部
教科・科目名	数学 ／ 数学(理数・医・薬)
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例）　別紙のとおり
備考	

略解

$\boxed{1}$

(1)

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+2)\cos x - (2x+1)\sin x}{(x^2+x+2)^2}$$

$$\therefore \quad g(x) = (x^2+x+2)\cos x - (2x+1)\sin x$$

$$\therefore \quad g'(x) = -(x^2+x+4)\sin x$$

$x^2+x+4 = (x+1/2)^2 + 15/4 > 0$ より，$g'(x) = 0 \iff \sin x = 0$ である．$g(x)$ の増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-(\pi^2+\pi+2)$	$\nearrow$	$4\pi^2+2\pi+2$

$0 < x < \pi$ で $g(x)$ は連続で単調に減少し，$g(0) > 0$，$g(\pi) < 0$ より中間値の定理から，$0 < x < \pi$ で $g(x) = 0$ となる x がただ1つ存在することがわかる．また，$\pi < x < 2\pi$ で $g(x)$ は連続で単調に増加し，$g(\pi) < 0$，$g(2\pi) > 0$ より中間値の定理から，$\pi < x < 2\pi$ で $g(x) = 0$ となる x がただ1つ存在することがわかる．したがって，題意は示された．

(2)

(1) で示した解のうち，小さい方を α，大きい方を β とする．$f(x)$ の増減を調べると

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ で $f(x)$ が最大となるのは $x = \alpha$ のときであり，

$$M = f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha^2+\alpha+2}$$

である．$g(\alpha) = 0$ より，

$$(\alpha^2+\alpha+2)\cos\alpha - (2\alpha+1)\sin\alpha = 0$$

$$\therefore \quad M = \frac{\sin\alpha}{\alpha^2+\alpha+2} = \frac{\cos\alpha}{2\alpha+1}$$

(3)

$\pi/4 < x < \pi/2$ で $\cos x$ は単調に減少し，

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\} > 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\pi+1) < 0$$

であるから，

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

である．また，$\cos x$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ で単調に減少するので，

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} < \cos\alpha < \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となり，$\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で

$$\frac{\pi}{2} + 1 < 2\alpha + 1 < \pi + 1$$

である．したがって，

$$0 < \frac{\cos\alpha}{2\alpha + 1} < \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{\pi + 2}$$

$$\therefore \quad M = \frac{\cos\alpha}{2\alpha + 1} < \frac{\sqrt{2}}{\pi + 2}$$

略解

$\boxed{2}$

(1)

$0 < \theta < \pi/2$ において $dx/d\theta = \cos\theta > 0$ より，この区間で x は θ について単調に増加する関数である．

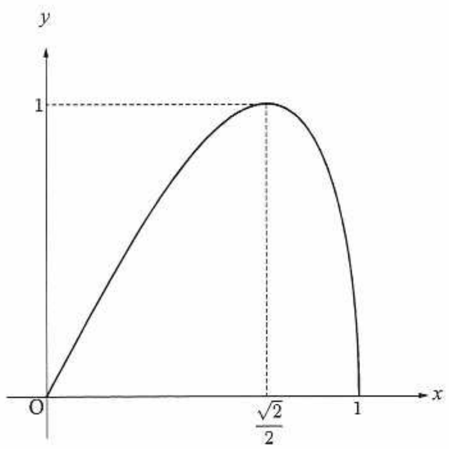
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} \\ &= \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$

$dy/dx = 0$ のとき，$\theta = \pi/4$（$x = 1/\sqrt{2}$）である．また，$0 < \theta < \pi/4$（$0 < x < 1/\sqrt{2}$）のとき，$dy/dx > 0$，$\pi/4 < \theta < \pi/2$（$1/\sqrt{2} < x < 1$）のとき，$dy/dx < 0$ である．$0 < \theta < \pi/2$ において $dx/d\theta \neq 0$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{d\theta} \\ &= \frac{-2\sin\theta(2\cos^2\theta + 1)}{\cos^3\theta}\end{aligned}$$

よって，$0 < \theta < \pi/2$（$0 < x < 1$）において $d^2y/dx^2 < 0$ である．増減表は以下のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\pi/4$	$\cdots$	$\pi/2$
x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}/2$	$\cdots$	1
dy/dx		$+$	0	$-$	
d^2y/dx^2		$-$	$-$	$-$	
y	0	↗	1	↘	0



(2)(a)

曲線 C 上の点 (x, y) は $0 < \theta < \pi/2$ より

$$y = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

で表すことができる．したがって，直線 $y = px$ と曲線 C の交点 (α, β) は

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}}, \quad \beta = p\sqrt{1 - \frac{p^2}{4}}$$

で表される．

(b)

$0 < \theta < \pi/2$ において x が θ について単調に増加する関数であるので，x を θ に変換して

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^1 y dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \cos\theta \, d\theta \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

θ_1 を $\sin\theta_1 = \sqrt{1 - \dfrac{p^2}{4}}$ すなわち $\cos\theta_1 = p/2$ $(0 < \theta_1 < \pi/2)$ をみたす値とする．

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int_0^{\sqrt{1-p^2/4}} (y - px) \, dx \\
&= \int_0^{\theta_1} \sin 2\theta \cos\theta \, d\theta - \left[\frac{px^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-p^2/4}} \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\theta_1} - \frac{p}{2}\left(1 - \frac{p^2}{4}\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{p}{2} + \frac{p^3}{24}
\end{aligned}$$

$S_1 : S_2 = 2 : 2 - p^2$ より

$$\frac{2}{3}p^2 = 2\left(-\frac{p^3}{24} + \frac{p}{2} \right)$$

$0 < p < \sqrt{2}$ に注意すると，$p = -4 + 2\sqrt{7}$ を得る．

略解

$\boxed{3}$

(1)

$1 \leqq k \leqq n-1$ において，点 R_k は線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{B}$ を内分するのでその内分比を $1-s:s$（$0<s<1$）とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}_k &= s\overrightarrow{\mathrm{OP}}_k + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{ks}{n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

と表される．また，点 R_k は線分 $\mathrm{Q}_k\mathrm{A}$ を内分するのでその内分比を $1-t:t$（$0<t<1$）とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}_k &= t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}_k + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{kt}{n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

点 O，A，B は一直線上にないので①② より次の 2 式が成り立つ．

$$\frac{ks}{n} = 1-t$$
$$1-s = \frac{kt}{n}$$

したがって，

$$(s,t) = \left(\frac{n}{n+k}, \frac{n}{n+k}\right)$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}_k = \frac{k}{n+k}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{n+k}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

(2)

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 8$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 5$ であるので，余弦定理から

$$7^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 5^2 + 8^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 20$ が得られる．

$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{129}$$

$1 \leqq k \leqq n-1$ において

$$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}_k| = \left|\frac{k}{n+k}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})\right| = \frac{\sqrt{129}k}{n+k} \qquad \cdots\cdots ③$$

この式は $k=n$ のときにも成り立つので③は $1 \leqq k \leqq n$ で成り立つ．

(3)

区分求積法より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{OR}}_k| &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{129}k}{n+k} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{129}\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} \\ &= \sqrt{129}\int_0^1\frac{x}{1+x}dx \\ &= \sqrt{129}(1-\log 2)\end{aligned}$$

（計算過程省略）

(4)
$1 \leqq k \leqq n-1$ において，

$$\begin{aligned} s_k &= (\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}_k \text{ の面積}) \\ &= \frac{k}{n+k} \cdot (\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{A} \text{ の面積}) \\ &= \frac{k}{n+k} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot (\triangle \mathrm{O}\mathrm{Q}_k\mathrm{A} \text{ の面積}) \\ &= \frac{k}{n+k} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot (\triangle \mathrm{OBA} \text{ の面積}) \\ &= 10\sqrt{3} \cdot \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^3}{1+\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

$s_n = 0$ に注意すると区分求積法より，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k &= 10\sqrt{3} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^3}{1+\left(\frac{k}{n}\right)} \\ &= 10\sqrt{3} \int_0^1 \frac{x^2-x^3}{1+x} dx \\ &= 10\sqrt{3}\left(-\frac{4}{3} + 2\log 2\right) \end{aligned}$$

（計算過程省略）