令和３年度入試（令和２年度実施）の情報開示
解答例について

| | |
|---|---|
| 入試の区分 | 一般選抜（前期日程） |
| 学部学科等 | 理・工・都市デザイン学部 |
| 教科・科目名 | 数学 ／ 数学(理・工・都市デ) |
| 正解・解答例<br>又は出題<br>（面接）意図 | （解答例）　別紙のとおり |
| 備考 | |

略解

$\boxed{1}$

(1)

$N = abba_{(4)}$ より，

$$
\begin{aligned}
N &= a \times 4^3 + b \times 4^2 + b \times 4^1 + a \times 4^0 \\
&= 65a + 20b
\end{aligned}
$$

また，$N = ccc_{(6)}$ より，

$$
\begin{aligned}
N &= c \times 6^2 + c \times 6^1 + c \times 6^0 \\
&= 43c
\end{aligned}
$$

よって，$65a + 20b = 43c$ が成り立つ．ここで，$65a + 20b = 5(13a + 4b)$ より，$43c$ は 5 を因数に持たなければならない．43 は 5 を因数に持たないので $c = 5$ でなければならない．したがって，

$$13a + 4b = 43$$

が得られる．$43 - 4b$ は 13 の倍数より $b = 1$ である．したがって，$a = 3$ となる．このとき，$N = 43 \times 5 = 215$ となる．以上より，$a = 3$，$b = 1$，$c = 5$，$N = 215$ である．

(2)

$w = \dfrac{z-1}{z+i}$ より，$(w-1)z = -1 - wi$．$w = 1$ とすると，$0 = -1 - i$ となり不適．よって，$w \neq 1$ であり，

$$z = \frac{-1 - wi}{w - 1}$$

が得られる．$|z| = \sqrt{2}$ より，

$$\left| \frac{-1 - wi}{w - 1} \right| = \sqrt{2}$$

この式を整理すると，

$$|w - 2 + i| = 2$$

(計算過程省略)

　以上より，$|z| = \sqrt{2}$ 上を動く時，$w$ は点 $2 - i$ を中心とする半径 2 の円周上を動く．

(3)

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin x dx$，$J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \cos x dx$ とおく．部分積分法を適用すると，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (e^x)' \sin x dx \\
&= [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \cos x dx \\
&= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{6}} - J
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (e^x)' \cos x dx \\
&= [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin x dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\pi}{6}} - 1 + I
\end{aligned}
$$

よって，

$$
I = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{\frac{\pi}{6}}
$$

略解

$\boxed{2}$

(1)

$0 < \theta < \pi/2$ において $dx/d\theta = \cos\theta > 0$ より，この区間で $x$ は $\theta$ について単調に増加する関数である．

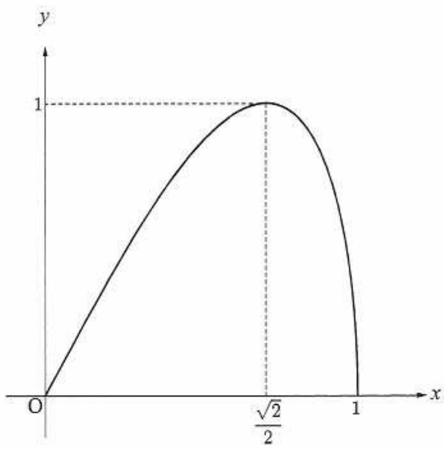
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} \\ &= \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$

$dy/dx = 0$ のとき，$\theta = \pi/4$（$x = 1/\sqrt{2}$）である．また，$0 < \theta < \pi/4$（$0 < x < 1/\sqrt{2}$）のとき，$dy/dx > 0$，$\pi/4 < \theta < \pi/2$（$1/\sqrt{2} < x < 1$）のとき，$dy/dx < 0$ である．$0 < \theta < \pi/2$ において $dx/d\theta \neq 0$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{d\theta} \\ &= \frac{-2\sin\theta(2\cos^2\theta + 1)}{\cos^3\theta}\end{aligned}$$

よって，$0 < \theta < \pi/2$（$0 < x < 1$）において $d^2y/dx^2 < 0$ である．増減表は以下のようになる．

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi/4$ | $\cdots$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}/2$ | $\cdots$ | $1$ |
| $dy/dx$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $d^2y/dx^2$ | | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $y$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |




(2)(a)

曲線 $C$ 上の点 $(x, y)$ は $0 < \theta < \pi/2$ より

$$y = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

で表すことができる．したがって，直線 $y = px$ と曲線 $C$ の交点 $(\alpha, \beta)$ は

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}}, \quad \beta = p\sqrt{1 - \frac{p^2}{4}}$$

で表される．

(b)

$0 < \theta < \pi/2$ において $x$ が $\theta$ について単調に増加する関数であるので，$x$ を $\theta$ に変換して

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^1 y dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \cos\theta \, d\theta \\
&= \left[ -\frac{2}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$\theta_1$ を $\sin\theta_1 = \sqrt{1 - \dfrac{p^2}{4}}$ すなわち $\cos\theta_1 = p/2$ $(0 < \theta_1 < \pi/2)$ をみたす値とする．

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int_0^{\sqrt{1-p^2/4}} (y - px)\, dx \\
&= \int_0^{\theta_1} \sin 2\theta \cos\theta \, d\theta - \left[ \frac{px^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-p^2/4}} \\
&= \left[ -\frac{2}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\theta_1} - \frac{p}{2}\left( 1 - \frac{p^2}{4} \right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{p}{2} + \frac{p^3}{24}
\end{aligned}$$

$S_1 : S_2 = 2 : 2 - p^2$ より

$$\frac{2}{3}p^2 = 2\left( -\frac{p^3}{24} + \frac{p}{2} \right)$$

$0 < p < \sqrt{2}$ に注意すると，$p = -4 + 2\sqrt{7}$ を得る．

略解

$\boxed{3}$

(1)

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+2)\cos x - (2x+1)\sin x}{(x^2+x+2)^2}$$

$$\therefore \quad g(x) = (x^2+x+2)\cos x - (2x+1)\sin x$$

$$\therefore \quad g'(x) = -(x^2+x+4)\sin x$$

$x^2+x+4 = (x+1/2)^2 + 15/4 > 0$ より，$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0$ である．$g(x)$ の増減表は以下のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $-(\pi^2+\pi+2)$ | $\nearrow$ | $4\pi^2+2\pi+2$ |

$0 < x < \pi$ で $g(x)$ は連続かつ単調に減少し，$g(0) > 0$，$g(\pi) < 0$ より中間値の定理から，$0 < x < \pi$ で $g(x) = 0$ となる $x$ がただ 1 つ存在することがわかる．また，$\pi < x < 2\pi$ で $g(x)$ は連続かつ単調に増加し，$g(\pi) < 0$，$g(2\pi) > 0$ より中間値の定理から，$\pi < x < 2\pi$ で $g(x) = 0$ となる $x$ がただ 1 つ存在することがわかる．したがって，題意は示された．

(2)(a)

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\} > 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\pi+1) < 0$$

したがって，中間値の定理より $\pi/4 < \alpha < \pi/2$ が言える．

(b)

(1) で示した解のうち，小さい方を $\alpha$，大きい方を $\beta$ とする．$f(x)$ の増減を調べると

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | $0$ |

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ で $f(x)$ が最大となるのは $x = \alpha$ のときであり，

$$M = f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha^2+\alpha+2}$$

である．$g(\alpha) = 0$ より，

$$(\alpha^2+\alpha+2)\cos\alpha - (2\alpha+1)\sin\alpha = 0$$

$$\therefore \quad M = \frac{\sin\alpha}{\alpha^2+\alpha+2} = \frac{\cos\alpha}{2\alpha+1}$$

(3)

$\pi/4 < x < \pi/2$ で $\cos x$ は単調に減少するので，

$$\cos\alpha < \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，$\pi/4 < x < \pi/2$ で

$$2x + 1 > 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$$

よって，

$$\frac{1}{2\alpha + 1} < \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{2}{\pi + 2}$$

したがって，

$$M = \frac{\cos\alpha}{2\alpha + 1} < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\pi + 2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi + 2}$$

が成り立つ．