令和３年度入試（令和２年度実施）の情報開示
解答例について

| | |
|---|---|
| 入試の区分 | 一般選抜（後期日程） |
| 学部学科等 | 理学部　数学科 |
| 教科・科目名 | 数学 ／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B |
| 正解・解答例又は出題（面接）意図 | （解答例）<br>別紙に略解を示す。 |
| 備考 | |

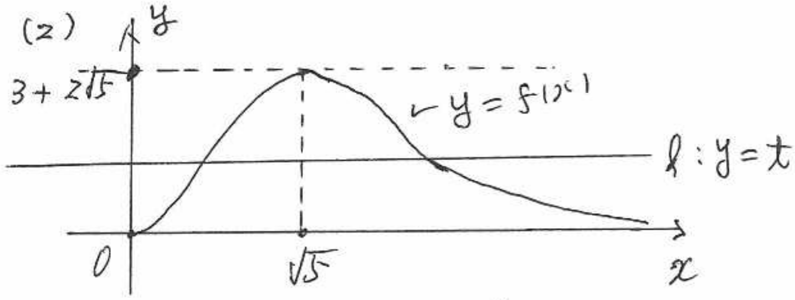
4 (略解)

(1) $f'(x) = -\dfrac{11(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{(x^2-3x+5)^2}$ より、$x \geqq 0$ における増減表は下表.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{5}$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\frac{11}{5}$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $3+2\sqrt{5}$ | ↘ | $0$ |

これより、関数 $f(x)$ は、$x=\sqrt{5}$ のとき最大値 $f(\sqrt{5})=3+2\sqrt{5}$ をとる。

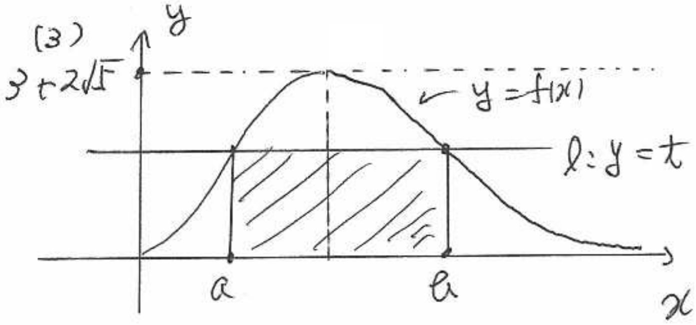
(2)




$y=f(x)$ のグラフは、$x \to \infty$ で $x$ 軸に漸近し、$x>0$ において常に $f(x)>0$.

グラフより、求める $t$ の範囲は $0 < t < 3+2\sqrt{5}$

(3)




$a$, $b$ は2次方程式 $t(x^2-3x+5)=11x$ の2解.

したがって、

$$a = \frac{(3t+11)-\sqrt{11(-t^2+6t+11)}}{2t},$$

$$b = \frac{(3t+11)+\sqrt{11(-t^2+6t+11)}}{2t}.$$

よって (i) $b-a = \dfrac{\sqrt{11(-t^2+6t+11)}}{t}$

(ii) $S(t)$ は上図斜線部分の面積だから、

$S(t) = \sqrt{11(-t^2+6t+11)}$。

$g(t) = -t^2+6t+11$ とおく。$g(t) = -(t-3)^2+20$ より、$g(t)$ の $0 < t < 3+2\sqrt{5}$ における最大値は $t=3$ のとき、$g(3)=20$.

ゆえに、$S(t)$ は $t=3$ のとき最大値 $S(3)=\sqrt{220} = 2\sqrt{55}$

$\boxed{2}$ (略解) 与えられた不等式に含まれている各値を全て底が3の対数で書き表す.

$$\frac{1}{2}+\log_9 21 = \log_3\sqrt{3}+\frac{\log_3 21}{2} = \log_3\sqrt{63} \quad \cdots ①$$

$$\log_3 8 = \log_3\sqrt{64} \quad \cdots ②$$

$$\int_3^6 \log_3 x\,dx = \frac{1}{\log 3}\int_3^6 \log x\,dx$$

$$= \frac{1}{\log 3}\Big[x\log x - x\Big]_3^6$$

$$= \log_3\left(64\times\left(\frac{3}{e}\right)^3\right)$$ より,

$$\frac{1}{2}\int_3^6 \log_3 x\,dx = \log_3\sqrt{64\times\left(\frac{3}{e}\right)^3} \quad \cdots ③$$

$0 < e < 3$ だから $\frac{3}{e} > 1$. したがって,

$63 < 64 < 64\times\left(\frac{3}{e}\right)^3$ だから, 関数 $y=\log_3 x$ が

単調増加関数であることに注意すれば, ①, ②, ③ より

与不等式が示される。

$\boxed{3}$（略解）

(1) $|w_1 w_2 w_3 w_4| = |w_1||w_2||w_3||w_4| = r^4 \cdots ①$

$\arg w_1 = \dfrac{\pi}{2}$，$\arg w_2 = \dfrac{\pi}{3}$，$\arg w_3 = \dfrac{\pi}{2}$，$\arg w_4 = \dfrac{2}{3}\pi$ だから

$\arg(w_1 w_2 w_3 w_4) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}\pi = 2\pi \cdots ②$

①，② より $w_1 w_2 w_3 w_4 = r^4 \cdots ③$

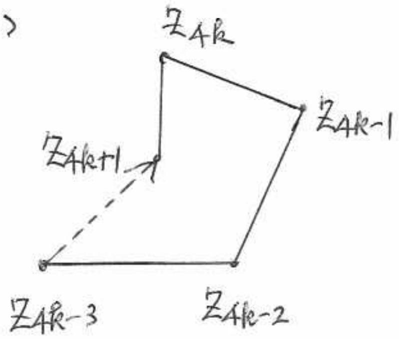
(2) 規則 $z_1 = 0$，$z_2 = r$，$\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} = w_n \quad (n \geqq 2) \cdots ☆$

より $z_5 = (1 + w_2 + w_2 w_3 + w_2 w_3 w_4) r \cdots ④$

$w_2 = r\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)$，$w_2 w_3 = r^2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i\right)$，$w_2 w_3 w_4 = -r^3 i$

よって $z_5 = \left(r + \dfrac{r^2}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} r^3\right) + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} r^2 + \dfrac{r^3}{2} - r^4\right) i \cdots ⑤$

(3)




$k \geqq 2$ に対して，規則 ☆ から

$$\begin{aligned} z_{4k-2} - z_{4k-3} &= w_{4k-3}(z_{4k-3} - z_{4k-4}) \\ &= w_{4k-3} w_{4k-4} w_{4k-5} w_{4k-6}(z_{4k-6} - z_{4k-7}) \\ &= w_1 w_4 w_3 w_2 (z_{4k-6} - z_{4k-7}) \\ &= r^4 (z_{4k-6} - z_{4k-7}) \\ &= \cdots \\ &= r^{4(k-1)}(z_2 - z_1) \cdots ⑥ \end{aligned}$$

同様にして，

$z_{4k-1} - z_{4k-2} = r^{4(k-1)}(z_3 - z_2) \cdots ⑦$

$z_{4k} - z_{4k-1} = r^{4(k-1)}(z_4 - z_3) \cdots ⑧$

$z_{4k+1} - z_{4k} = r^{4(k-1)}(z_5 - z_4) \cdots ⑨$

⑥，⑦，⑧，⑨ の辺々を加えることによって

$z_{4k+1} - z_{4k-3} = r^{4(k-1)} z_5 \cdots ⑩$

を得る。⑩ は $k = 1$ に対しても成立していることに注意する。

⑩ より $z_{4n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(z_{4k+1} - z_{4k-3}) = z_5 \sum_{k=1}^{n} r^{4(k-1)} = z_5 \dfrac{1 - r^{4n}}{1 - r^4} \cdots ⑪$

(4) $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，⑤ より $z_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{-1 + 2\sqrt{3}}{9} i \cdots ⑫$

⑪，⑫ より $x_{4n+1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right\}$，$y_{4n+1} = \dfrac{-1 + 2\sqrt{3}}{8}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right\}$.

よって，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_{4n+1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} y_{4n+1} = \dfrac{-1 + 2\sqrt{3}}{8}$.