令和３年度入試（令和２年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（後期日程）
学部学科等	工学部　工学科電気電子工学・知能情報工学・機械工学コース　都市デザイン学部　都市・交通デザイン学科
教科・科目名	数学 ／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備考	

$\boxed{1}$

(1)

$y=f(x)$ が $x=0$ で $y=ax+b$ と接するので、$f(0)=b$

$u=v=0$ と置くと、

$$\begin{aligned} f(0+0) &= f(0)f(0) \\ b &= b^2 \\ b(b-1) &= 0 \end{aligned}$$

$b \neq 0$ より、$b=1$

(2)

$u=x$、 $v=-x$ と置くと、

$$\begin{aligned} f(x-x) &= f(x)f(-x) \\ 1 &= f(x)f(-x) \end{aligned}$$

したがって、

$$f(-x)=\frac{1}{f(x)}$$

(3)

導関数の定義から、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} f(x)\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x} \end{aligned}$$

$y=f(x)$ が $x=0$ で $y=ax+1$ と接するので、$\Delta x\to 0$ のとき $f(\Delta x)\to a\Delta x+1$

したがって、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} f(x)\frac{a\Delta x+1-1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} af(x) \\ &= af(x) \end{aligned}$$

(4)

$X=f(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} dX &= \frac{df(x)}{dx}dx \\ &= af(x)dx \end{aligned}$$

したがって、

$$dx=\frac{1}{af(x)}dX=\frac{1}{aX}dX$$

これを使うと、

$$\begin{aligned} I=\int\frac{f(-x)}{f(-x)+2}dx &= \int\frac{1/f(x)}{1/f(x)+2}dx \\ &= \int\frac{1}{1+2f(x)}dx \\ &= \frac{1}{a}\int\frac{dX}{(2X+1)X} \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{A}{2X+1}+\frac{B}{X}=\frac{(A+2B)X+B}{(2X+1)X}$$

より、

$$\begin{aligned} A+2B &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

つまり、$A=-2, B=1$ とおけば部分分数に展開できるので、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a}\int\frac{-2dX}{(2X+1)}+\frac{1}{a}\int\frac{dX}{X} \\ &= -\frac{1}{a}\int\frac{dX}{(X+1/2)}+\frac{1}{a}\int\frac{dX}{X} \\ &= -\frac{1}{a}\log\left|X+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{a}\log|X|+C \\ &= \frac{1}{a}\log\left|\frac{X}{X+\frac{1}{2}}\right|+C \\ &= \frac{1}{a}\log\left|\frac{f(x)}{f(x)+\frac{1}{2}}\right|+C \end{aligned}$$

ここで、C は積分定数

あるいは、$C'=C+\frac{1}{a}\log 2$ として

$$\frac{1}{a}\log\left|\frac{f(x)}{2f(x)+1}\right|+C'$$

とも書ける

(5)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx \\ &= [f(x)\sin x]_{x=0}^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sin x dx \\ &= -a\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx \\ &= -a\left[[-f(x)\cos x]_{x=0}^{\pi}+\int_0^{\pi} f'(x)\cos x dx\right] \\ &= -a\left[(f(\pi)+f(0))+a\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx\right] \\ &= -a\left(f(\pi)+1\right)-a^2 I \end{aligned}$$

したがって、

$$\left(1+a^2\right)I=-a\left(f(\pi)+1\right)$$
$$I=-\frac{a}{1+a^2}\left(f(\pi)+1\right)$$

$\boxed{2}$

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ とおくと,

$|z^6| = 1$, $|z| = 1$, $z^6 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$

ド・モアブルの定理より,

$z^6 = \cos 6\theta + i\sin 6\theta = \cos\pi + i\sin\pi$

$6\theta = \pi + 2k\pi$, $\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ (k は整数)

よって, $z = \cos(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3})$

ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では、$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

(i)$k = 0$ のとき, $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

(ii)$k = 1$ のとき, $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$

(iii)$k = 2$ のとき, $z_2 = \cos\dfrac{5}{6}\pi + i\sin\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

(iv)$k = 3$ のとき, $z_3 = \cos\dfrac{7}{6}\pi + i\sin\dfrac{7}{6}\pi = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$

(v)$k = 4$ のとき, $z_4 = \cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi = -i$

(vi)$k = 5$ のとき, $z_5 = \cos\dfrac{11}{6}\pi + i\sin\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

以上より,

$z = \pm i, \dfrac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$ (複合任意)　　(答)

(別解)

$z^6 = -1$

$z^6 + 1 = 0$

$(z^2)^3 + 1^3 = 0$

$(z^2+1)(z^4 - z^2 + 1) = 0$

$(z^2+1)\{(z^2+1)^2 - 3z^2)\} = 0$

$(z^2+1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$

$z = \pm i, \dfrac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$ (複合任意)　　(答)

(2) 複素数の絶対値は原点からの距離を表す. 与式より, z は複素平面上の異なる 2 定点からの距離の和が一定となる点の集合であることがわかる. したがって楕円の定義より, z は $(-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3})$ を焦点とする楕円の軌跡を描く.

(3) zy 平面上で考えると，楕円の焦点は，$(-\sqrt{3}, 0)$，$(\sqrt{3}, 0)$ であるから，この楕円と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ a, b $(a > b > 0)$ とおくと，

$a - \sqrt{3} + a - (-\sqrt{3}) = 4, \ a = 2$

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + b^2} = 2, \ b = 1$

これらを楕円の式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に代入して，

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ （答）

(4) 複素平面上での図形の回転を考える。z_0 を原点を中心に θ だけ回転させたときの z は，

$z = z_0(\cos\theta + i\sin\theta)$ となる．ここで，z の $\dfrac{\pi}{6}$ 回転前を $z_0 = x_0 + iy_0$ とおくと，

$$z_0 = z(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = z(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})$$
$$x_0 + iy_0 = (x + iy)(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{i}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}iy + \frac{1}{2}y = (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y) + i(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$$

以上より，両辺の実部と虚部を比較して，

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \ y_0 = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

これを，(3) の方程式に代入して，

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 + 4(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 = 4$$

$$(\sqrt{3}x + y)^2 + 4(-x + \sqrt{3}y)^2 = 16$$

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4(x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2) = 16$$

$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$ （答）

3

(1) 最初に与えられる正方形の周の長さは 4α である。内部に四角形を作る行為を繰り返すと，正方形の1辺の長さは $1/\sqrt{2}$ 倍になり，四角形の周の長さは

$$\begin{aligned} a_1 &= 4\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha, \\ a_2 &= 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\alpha, \\ a_3 &= 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\alpha, \cdots \end{aligned}$$

となる。よって

$$a_n = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\alpha$$

これは初項 $4\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha$，公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の無限等比数列である。公比の大きさが1より小さいのでこの数列の和は収束し

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{4\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4}{\sqrt{2}-1}\alpha = 4\left(\sqrt{2}+1\right)\alpha$$

(2) 最初に与えられる長方形の周の長さは $2(\alpha+\beta)$ である。行為を繰り返すと

$$\begin{aligned} &a_1 = 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad a_2 = (\alpha+\beta), \\ &a_3 = 4\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad a_4 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta), \\ &a_5 = 4\cdot\frac{1}{8}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad a_6 = \frac{1}{4}(\alpha+\beta), \quad \cdots \end{aligned}$$

となり,「ひし形」と「長方形」が交互に現れる。よって，場合分けをして

$$\begin{aligned} &n\text{ が奇数のとき（ひし形），} \qquad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ &n\text{ が偶数のとき（長方形），} \qquad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

a_n の奇数項（ひし形）に着目すると，初項 $2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比数列である。公比の大きさが1より小さいので，この数列の和は収束し

$$S_{\text{奇数項}} = \frac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{1-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

偶数項（長方形）の場合も同様にして

$$S_{\text{偶数項}} = \frac{\alpha+\beta}{1-\frac{1}{2}} = 2(\alpha+\beta)$$

よって，求める S はこれらの和であるので

$$S = 4\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + 2(\alpha+\beta)$$