令和３年度入試（令和２年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程・追試験）
学部学科等	理・工・都市デザイン学部
教科・科目名	数学 ／ 数学
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例）　別紙のとおり
備　　考	

略解

$\boxed{1}$

(1)

$$\int x\sin nx\,dx = -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx + C$$

（計算過程省略）ただし，C は積分定数．したがって，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx &= \left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos(-n\pi)\\ &= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

(2)

(i) $m \neq n$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

(ii) $m = n$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= \pi\end{aligned}$$

(3)

(1)，(2) の結果より，

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi}^{\pi}(x + a\sin x + b\sin 2x)^2\,dx\\ &= \frac{2}{3}\pi^3 + \pi(a^2 + 4a + b^2 - 2b)\end{aligned}$$

(4)

(3) の結果より，

$$\begin{aligned}I &= \frac{2}{3}\pi^3 + \pi(a^2 + 4a + b^2 - 2b)\\ &= \frac{2}{3}\pi^3 + \pi\left((a+2)^2 + (b-1)^2 - 5\right)\end{aligned}$$

したがって，$a = -2$，$b = 1$ のとき，I は最小値 $\dfrac{2}{3}\pi^3 - 5\pi$ をとる．

略解

$\boxed{2}$

(1)

条件より，

$$
\begin{aligned}
\log_2 a_{n+2} &= \log_2 \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2} \\
&= 3\log_2 a_{n+1} - 2\log_2 a_n
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \log_2 a_{n+2} - \log_2 a_{n+1} = 2(\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n)
$$

$b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$ とおくと

$$
b_{n+1} = 2b_n
$$

を得る．$\{b_n\}$ は公比 2，初項 $b_1 = \log_2 a_2 - \log_2 a_1 = 2$ の等比数列であるので

$$
b_n = 2^n
$$

となる．

(2)

(1) より

$$
\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = 2^n
$$

であるので $n \geqq 2$ のとき

$$
\log_2 a_n = \log_2 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k
$$

$$
\therefore \quad \log_2 a_n = 2^n - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①
$$

よって

$$
a_n = 2^{2^n - 1}
$$

が得られる．$a_1 = 2$ よりこの式は $n = 1$ のときも成立する．

(3)

$a_n > 2021^{1000}$ の両辺に底が 2 の対数をとると

$$
\log_2 a_n > 1000 \log_2 2021
$$

すなわち①より

$$
2^n - 1 > 1000 \log_2 2021 \qquad \cdots\cdots\cdots ②
$$

が得られる．$\{a_n\}$ は単調に増加するため，②を満たす最小の自然数を求めればよい．

$$
2^{10} = 1024 < 2021 < 2048 = 2^{11}
$$

より，

$$
10 < \log_2 2021 < 11 \qquad \cdots\cdots\cdots ③
$$

を満たす．③ より，$n = 14$ のとき

$$
\log_2 2021^{1000} = 1000 \log_2 2021 < 11000 < 16383 = 2^{14} - 1
$$

となり，②が成り立つ．$n = 13$ のとき

$$
2^{13} - 1 = 8191 < 10000 < 1000 \log_2 2021 = \log_2 2021^{1000}
$$

となり，②が成り立たない．よって，求める自然数は 14 である．

略解

$\boxed{3}$

(1)

$P(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px+q$（p，q は実数）とおくと，

$$P(x)=Q(x)(x-\alpha)^2+px+q$$

と書ける．両辺を x で微分すると

$$P'(x)=Q'(x)(x-\alpha)^2+2Q(x)(x-\alpha)+p$$

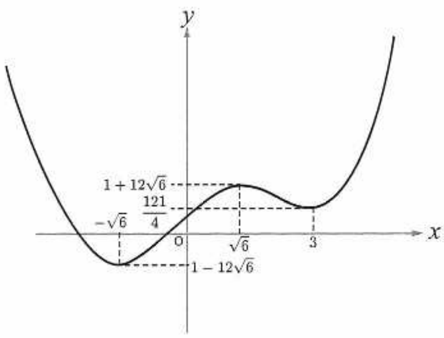
条件 $P(\alpha)=0$，$P'(\alpha)=0$ より，$p=0$，$q=0$ が得られる．よって，$P(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる．

(2)(a)

$$f'(x)=(x-3)(x^2-6)$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=3$，$x=\pm\sqrt{6}$ である．増減表と曲線 $y=f(x)$ の概形は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$	3	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$1-12\sqrt{6}$	$\nearrow$	$1+12\sqrt{6}$	$\searrow$	$\frac{121}{4}$	$\nearrow$



(b)

求める直線の方程式を $y=ax+b$ とおき，この直線と $y=f(x)$ との接点を α，β（$\alpha<\beta$）とおく．

(1) より

$$\begin{aligned}f(x)-(ax+b)&=\frac{1}{4}x^4-x^3-3x^2+(18-a)x+10-b\\&=\frac{1}{4}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\end{aligned}$$

と因数分解できる．この恒等式で係数を比較すると次が得られる．

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-12\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)=-36+2a\\ (\alpha\beta)^2=40-4b\end{cases}$$

$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta$ に注意すると

$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-8$$

が得られる．

$$\therefore \quad a = 10, \quad b = -6$$

したがって，求める直線の方程式は

$$y = 10x - 6$$

である．