令和７年度入試（令和６年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜　後期日程
学部学科等	理学部 都市デザイン学部地球システム科学科・都市・交通デザイン学科
教科・科目名	数学／数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備　　考	

$\boxed{1}$ (1) 条件（a）

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$$

より

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \int 3\,dx \\ &= 3x+C \qquad (C\text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

条件（c）より

$$f(0)+g(0)=1+(-2)=-1$$

他方 $f(x)+g(x)=3x+C$ であるから

$$C=f(0)+g(0)=-1$$

したがって

$$f(x)+g(x)=3x-1$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2 &= \{f(x)+g(x)\}^2-2f(x)g(x) \\ &= (3x-1)^2-2f(x)g(x) \end{aligned}$$

条件（b）に代入して

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)^2-2f(x)g(x)-5x^2}{2x} &= 0 \\ \lim_{x\to\infty}\frac{-2f(x)g(x)+4x^2-6x+1}{2x} &= 0 \end{aligned}$$

$f(x)$ と $g(x)$ は x の整式であるから，上式の分子の $-2f(x)g(x)+4x^2-6x+1$ も x の整式であり，それを x の n 次式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ と表すとき（ただし，$a_n\neq 0$）

$$\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{2x}=x^{n-1}\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{2}$$

ここで，$x\to\infty$ のとき

$$\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{2}\to\frac{a_n}{2}\ (\neq 0)$$

であるが，$n\geqq 2$ のとき $x^{n-1}\to\infty$ $(x\to\infty)$ であるから，もし $n\geqq 2$ ならば条件（b）の極限は存在しない．

したがって，$n\leqq 1$ であり，$-2f(x)g(x)+4x^2-6x+1$ は 1 次以下の整式である．

$$-2f(x)g(x)+4x^2-6x+1=a_1x+a_0$$

の形なので

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2f(x)g(x)+4x^2-6x+1}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x+a_0}{2x}=\frac{a_1}{2}=0$$

より $a_1=0$ である．また，条件（c）より

$$f(0)g(0)=1\times(-2)=-2$$

だから

$$a_0 = -2f(0)g(0) + 1 = 5$$

したがって

$$-2f(x)g(x) + 4x^2 - 6x + 1 = 5$$

すなわち

$$f(x)g(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

(3) $f(x)$ が m 次式で，$g(x)$ が n 次式であるとき，$f(x)g(x)$ は $(m+n)$ 次式である．
(2) より $f(x)g(x)$ は 2 次式であるから，$m+n=2$ である．
$f(x)$ または $g(x)$ のどちらか一方が 2 次式であるとき他方は 0 次式であり，
$f(x)+g(x)$ は 2 次式になってしまうので，(1) よりこの場合は起こらない．
したがって $f(x), g(x)$ ともに 1 次式である．

$$f(x) = ax + b, \quad g(x) = cx + d$$

とおく．
条件（c）より $b=1, d=-2$ である．
$f(x)+g(x) = (a+c)x - 1$ であるから，(1) より

$$a + c = 3 \ \cdots \ ①$$

また $f(x)g(x) = (ax+1)(cx-2) = acx^2 + (-2a+c)x - 2$ であるから，(2) より

$$\begin{aligned} ac &= 2 \\ -2a + c &= -3 \ \cdots \ ② \end{aligned}$$

①と②より $a=2, c=1$ である．ゆえに

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x - 2$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{2x+1}{(2x+1)^2 + (x-2)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{2x+1}{5(x^2+1)}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx &= \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx \\ &= \Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1 \\ &= \log 2 - \log 1 = \log 2 \end{aligned}$$

また，2つめの定積分について，$x=\tan\theta$ とおくとき，$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

であるから

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}\,dx = \frac{1}{5}\log 2 + \frac{\pi}{20}$$

$\boxed{2}$ (1)

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1}\, dx \\ &= \int_1^e (x)' \cdot (\log x)^{n+1}\, dx \\ &= \Big[x\,(\log x)^{n+1}\Big]_1^e - \int_1^e x \cdot \left\{(n+1)(\log x)^n \frac{1}{x}\right\} dx \quad \text{（部分積分）} \\ &= \left\{e\,(\log e)^{n+1} - 1\,(\log 1)^{n+1}\right\} - (n+1)I_n \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

(2) (i) $n=1$ のとき．
I_1 について定積分を直接計算すると

$$I_1 = \int_1^e \log x\, dx = \int_1^e (x)' \log x\, dx = \Big[x \log x\Big]_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1$$

また，与式の右辺は

$$(-1)^{1+1}1! + a_1 e = 1 + a_1 e$$

であるから，$a_1 = 0$ とすれば，I_1 は

$$I_1 = (-1)^{1+1}1! + a_1 e \quad (a_1 \text{ は整数})$$

の形で表される．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する．すなわち

$$I_k = (-1)^{k+1}k! + a_k e \quad (a_k \text{ は整数})$$

であると仮定する．このとき（1）より

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= e - (k+1)I_k \\ &= e - (k+1)\left\{(-1)^{k+1}k! + a_k e\right\} \\ &= (-1)^{k+2}(k+1)! + \{1-(k+1)a_k\}\,e \end{aligned}$$

となるので

$$a_{k+1} = 1 - (k+1)a_k$$

とおくと，a_{k+1} は整数であり，I_{k+1} は

$$I_{k+1} = (-1)^{(k+1)+1}(k+1)! + a_{k+1}e \quad (a_{k+1} \text{ は整数})$$

の形で表される．

(i) と (ii) より，すべての正の整数 n に対して，I_n は

$$I_n = (-1)^{n+1}n! + a_n e \quad (a_n \text{ は整数})$$

の形で表される．

(3) 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n$$

を満たしているので

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{a_n}{n!} \\ &= \frac{1-(n+1)a_n}{(n+1)!} + \frac{a_n}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$$

$k \geqq 1$ のとき

$$\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{2}$$

であるから

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{k}\frac{1}{k+1} \leqq \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{k} = \frac{1}{2^k}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \\ &< 1 \qquad \text{(最後の不等式で } \frac{1}{2^n} > 0 \text{ を使った)} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ (1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= (1-r, 5-r, 0)\\ \overrightarrow{PB} &= (4-r, 2-r, \sqrt{6})\end{aligned}$$

について

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}| &= \sqrt{2r^2-12r+26}\\ |\overrightarrow{PB}| &= \sqrt{2r^2-12r+26}\\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} &= 2r^2-12r+14\end{aligned}$$

$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ のなす角を θ とおく. $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}|\,|\overrightarrow{PB}|}\\ &= \frac{r^2-6r+7}{r^2-6r+13}\\ &= 1-\frac{6}{r^2-6r+13}\\ &= 1-\frac{6}{(r-3)^2+4}\\ &\geqq 1-\frac{6}{4}=-\frac{1}{2} \quad (\text{等号は } r=3 \text{ のとき})\end{aligned}$$

関数 $\cos\theta$ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲では単調に減少する関数なので, $\cos\theta$ が最小となるときに θ は最大になる.
したがって, $r=3$ のとき θ は最大となり, 求める点 P の座標は $\mathrm{P}(3,3,0)$ である.

(2) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(s\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OP}$ が

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0, \quad \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

を満たすための条件式を s, t を用いて表す. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ に関する内積を求めると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} &= 26\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} &= 26\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= 14\\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} &= 18\\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB} &= 18\end{aligned}$$

これらを用いて計算すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA} &= s\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\\ &= 26s+14t-18\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OB} &= s\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}\\ &= 14s+26t-18\end{aligned}$$

したがって，s, t は次の式を満たす．

$$\begin{cases} 26s + 14t - 18 = 0 \\ 14s + 26t - 18 = 0 \end{cases}$$

これを解いて

$$s = t = \frac{9}{20}$$

が求める値である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{QA}}, \overrightarrow{\mathrm{QB}}$ であることに注意すれば

$$(\text{四面体 PQAB の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle\mathrm{QAB}\text{ の面積}) \times |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$$

$\triangle$QAB と $\triangle$OAB を比較するとき，AB の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

となるので

$$(\triangle\mathrm{QAB}\text{ の面積}) = \frac{1}{10} \times (\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積})$$

ここで

$$\begin{aligned} (\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積}) &= \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \times \sin\angle\mathrm{AOB} \\ &= \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \times \sqrt{1 - \cos^2\angle\mathrm{AOB}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{26}\sqrt{26}\sqrt{1 - \left(\frac{14}{\sqrt{26}\sqrt{26}}\right)^2} \\ &= 2\sqrt{30} \end{aligned}$$

であるから

$$(\triangle\mathrm{QAB}\text{ の面積}) = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (-\frac{15}{20}, \frac{3}{20}, \frac{9\sqrt{6}}{20})$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

したがって

$$(\text{四面体 PQAB の体積}) = \frac{\sqrt{6}}{5}$$