

令和7年度入試（令和6年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜 前期日程
学部学科等	教育・経済学部
教科・科目名	数学
正解・解答例 又は出題 (面接)意図	(解答例) 別紙のとおり
備 考	

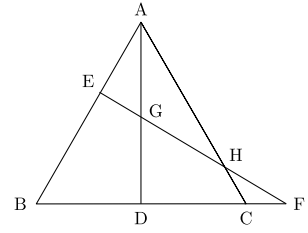
【教育・経済学部 解答例(略解)】

① (1) $\triangle ABD$ と線分 EF に対してメネラウスの定理を適用すれば,
 $1 = \frac{BF}{FD} \cdot \frac{GD}{AG} \cdot \frac{AE}{EB}$ となる. 仮定から $\frac{BF}{FD} = \frac{12}{7}$, $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$ であるから

$$1 = \frac{12}{7} \cdot \frac{GD}{AG} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{7} \cdot \frac{GD}{AG}. \quad \text{故に} \quad \frac{GD}{AG} = \frac{7}{8}.$$

$AD = AG + GD$ であるから

$$\frac{AD}{AG} = \frac{AG}{AG} + \frac{GD}{AG} = 1 + \frac{GD}{AG} = \frac{15}{8}. \quad \text{答え: } \frac{AD}{AG} = \frac{15}{8}.$$



(2) $\triangle EBF$ と線分 DA に対してメネラウスの定理を適用すれば, $1 = \frac{BA}{AE} \cdot \frac{EG}{GF} \cdot \frac{FD}{DB}$. 仮定から $\frac{BA}{AE} = \frac{5}{2}$, $\frac{FD}{DB} = \frac{7}{5}$ であるから

$$1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{EG}{GF} \cdot \frac{7}{5}. \quad \text{故に} \quad \frac{EG}{GF} = \frac{2}{7}. \quad \text{答え: } \frac{EG}{GF} = \frac{2}{7}.$$

(3) $\triangle ABC$ と線分 EF に対してメネラウスの定理を適用すれば, $1 = \frac{BA}{AE} \cdot \frac{EH}{FH} \cdot \frac{FC}{CB}$. 仮定から $\frac{BA}{AE} = \frac{5}{2}$, $\frac{FC}{CB} = \frac{1}{5}$ であるので,

$$1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{EH}{FH} \cdot \frac{1}{5}. \quad \text{故に} \quad \frac{FH}{EH} = \frac{1}{2}. \quad \text{答え: } \frac{FH}{EH} = \frac{1}{2}.$$

(4) 仮定から $AG = \frac{4}{3}HF \dots$ ① 他方, (2), (3) より

$$7EG = 2GH + 2HF \quad \text{かつ} \quad 2HF = EG + GH. \quad (*)$$

これらから GH の項を消去すれば, $HF = \frac{3}{2}EG$. このことと①より, $AG = 2EG \dots$ ② 他方, 四角形 $EBDG$ が円に内接していることから, 方べきの定理より $AE \cdot AB = AG \cdot AD$ であるが, 仮定から $AB = \frac{5}{2}AE$ であり, (1) から $AD = \frac{15}{8}AG$ であるので

$$\frac{5}{2}(AE)^2 = AE \cdot AB = AG \cdot AD = \frac{15}{8}(AG)^2. \quad \text{故に} \quad (AE)^2 = \frac{3}{4}(AG)^2.$$

従って②より, $(AE)^2 + (EG)^2 = (AG)^2$ となるので $\angle AEG = \pi/2$ である. 四角形 $EBDG$ が円に内接するから, $\triangle ADB = \pi - \triangle AEG = \frac{\pi}{2}$ となり, $\triangle AEG$ と $\triangle ADB$ は相似である. 更に $\triangle ADC$ も直角三角形であり, $BD = CD$ であるから $\triangle ADB$ と $\triangle ADC$ は合同である. よって $\triangle ABC$ の各頂点の角度はいずれも $\frac{\pi}{3}$ となり, $\triangle ABC$ は正三角形である.

(5) 点 H を通り AD と平行な直線と, 直線 BC の交点を I とする. $\triangle FGD$ と $\triangle FHI$ は相似である. (*) から EG を消去すると, $HG = \frac{4}{3}HF$. すなわち $HG : FH = 4 : 3$. 故に $FG : FH = 7 : 3$. 従って $GD : HI = 7 : 3$. すなわち $GD = \frac{7}{3}HI$. 他方, (1) より

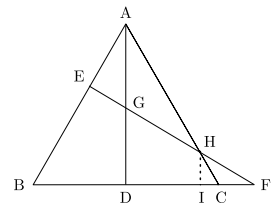
$$GD = AD - AG = AD - \frac{8}{15}AD = \frac{7}{15}AD.$$

よって $AD = \frac{15}{7}GD = \frac{15}{7} \cdot \frac{7}{3}HI = 5HI$. それ故,

$$2S_1 = BC \cdot AD = 5CF \cdot 5HI = 25CF \cdot HI = 25 \cdot 2 \cdot S_2.$$

従って $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{25}$.

答え: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{25}$.



□2 (1) 等比数列 $\{a_n\}$ の公比は $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\beta}{\alpha}$ であり, $\{b_n\}$ の公差は $b_2 - b_1 = \beta - \alpha$ であるから,

$$a_3 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) a_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 a_1 = \frac{\beta^2}{\alpha}, \quad b_3 = (\beta - \alpha) + b_2 = 2(\beta - \alpha) + b_1 = 2\beta - \alpha.$$

故に

$$a_3 - b_3 = \frac{\beta^2}{\alpha} - 2\beta + \alpha = \frac{1}{\alpha}(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2) = \frac{1}{\alpha}(\beta - \alpha)^2 > 0.$$

すなわち $a_3 > b_3$.

(2) $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} a_1 = \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}}$ であるから

$$\begin{aligned} (a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) &= a_{n+1} - a_n - (b_{n+1} - b_n) = \frac{\beta^n}{\alpha^{n-1}} - \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}} - (\beta - \alpha) \\ &= \frac{\beta^n - \alpha\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}} - (\beta - \alpha) = \frac{\beta^{n-1}(\beta - \alpha)}{\alpha^{n-1}} - (\beta - \alpha) \\ &= \frac{(\beta - \alpha)(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\alpha^{n-1}}. \end{aligned}$$

$$\text{答え: } (a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) = \frac{(\beta - \alpha)(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\alpha^{n-1}}.$$

(3) 正の整数 n に対して, $A_n = (\beta - \alpha)(\beta^n - \alpha^n)$ と置き, 数学的帰納法を用いて $A_n > 0$ であることを示す. 明らかに $A_1 = (\beta - \alpha)^2 > 0$ である. $A_n > 0$ であると仮定する. $(\beta - \alpha)^2 \beta^n > 0$ であるから, このとき

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (\beta - \alpha)(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) = (\beta - \alpha)(\beta\beta^n - \alpha\alpha^n) \\ &= (\beta - \alpha)(\beta\beta^n - \alpha\beta^n + \alpha\beta^n - \alpha\alpha^n) \\ &= (\beta - \alpha)\{(\beta - \alpha)\beta^n + \alpha(\beta^n - \alpha^n)\} \\ &= (\beta - \alpha)^2 \beta^n + \alpha A_n > 0. \end{aligned}$$

従ってすべての2以上の整数 n に対して $A_{n-1} > 0$. それ故 (2) より,

$$(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) = \frac{(\beta - \alpha)(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\alpha^{n-1}} = \frac{A_{n-1}}{\alpha^{n-1}} > 0.$$

すなわち, $a_{n+1} - b_{n+1} > a_n - b_n$ ($n = 3, 4, 5, \dots$). (1) より $a_3 > b_3$ であり, $a_n > b_n$ を仮定すれば, $a_{n+1} - b_{n+1} > 0$ となる. すなわち $a_{n+1} > b_{n+1}$. 従って (数学的帰納法より), すべての3以上の n に対して $a_n > b_n$ となる.

③ (1) 2 倍角の公式より

$$\sin^2 \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = 4 \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} = 4(1 - x^2)x^2$$

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2x^2 - 1$$

であるから、 $x \geq 0$ であることより

$$f(\theta) = 8(1 - x^2)x^2 - 3(2x^2 - 1) + \sqrt{2\{1 + (2x^2 - 1)\}} + 1 = -8x^4 + 2x^2 + 2x + 4.$$

$$\text{答え： } f(\theta) = -8x^4 + 2x^2 + 2x + 4.$$

(2) θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき、 x は $0 \leq x \leq 1$ の範囲を動く． $g(x) = -4x^4 + x^2 + x + 2$ と置いて、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲での $g(x)$ の増減を調べる．

$$g'(x) = -16x^3 + 2x + 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)(16x^2 + 8x + 2) = -(2x - 1)(8x^2 + 4x + 1).$$

従って $y = g(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$	1	+	0	-	-13
$g(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0

$0 \leq x \leq 1$ の範囲での $g(x)$ の最大値は $\frac{5}{2}$ であり、最小値は 0 である．従って、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲での $f(\theta)$ の最大値は 5、最小値は 0 である．

$f(\theta)$ が最大となるのは、 $x = \frac{1}{2}$ となるとき、すなわち、 $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \frac{1}{2}$ となるときであるが、 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、 $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \frac{1}{2}$ となるのは、

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ または } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

となるとき、そのときに限る．従って $f(\theta)$ が最大値 5 を取るのは、 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ または $\theta = \frac{4\pi}{3}$ のときである．

$f(\theta)$ が最小となるのは、 $x = 1$ となるとき、すなわち $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = 1$ となるときである． $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、 $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = 1$ となるのは、 $\theta = 0$ のとき、そのときに限る．従って $f(\theta)$ が最小値 0 を取るのは、 $\theta = 0$ のときである．

$$\text{答え： } f(\theta) \text{ は } \theta = 0 \text{ のとき最小値 } 0 \text{ を取り、} \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ または } \theta = \frac{4\pi}{3} \text{ のとき最大値 } 5 \text{ を取る.}$$
