

令和7年度入試（令和6年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜 前期日程
学部学科等	理（1科目選択）・医・薬学部
教科・科目名	数学
正解・解答例 又は出題 （面接）意図	(解答例) 別紙のとおり
備 考	

【理（1科目選択）・医・薬学部（略解）】

① (1) $X = x^2$ と置けば, $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X - 1)^3 = (x^2 - 1)^3$. 従って

$$P(x) = (x^2 - 1)^3 x^3 (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$$

となり, $P(x)$ は $x^2 - 1$ で割り切れる.

(2) 6480 は $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$ のように素因数分解される.

答え: $6480 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$.

(3) まず $P(n)$ が 2^4 の倍数であることを示す. 連続する 2 つの整数のうち一方は 2 の倍数であるから $(n - 1)n$ は 2 の倍数である. $(n^2 - 1)^3 n^3 = (n + 1)^3 (n - 1)^3 n^3$ と書けるので, $(n^2 - 1)^3 n^3$ は 2^3 の倍数である. 更に $(n^2 + 1)(n^2 + 2)$ も連続する 2 つの整数の積であるから 2 の倍数である. よって $P(n) = (n^2 - 1)^3 n^3 (n^2 + 1)(n^2 + 2)(n^2 + 3)$ は 2^4 の倍数である.

次に $P(n)$ が 3^4 の倍数であることを示す. 連続する 3 つの整数のうち 1 つは 3 の倍数であるから, $(n - 1)n(n + 1)$ は 3 の倍数である. $(n^2 - 1)^3 n^3 = (n - 1)^3 n^3 (n + 1)^3$ と書けるので, $(n^2 - 1)^3 n^3$ は 3^3 の倍数である. 更に $(n^2 + 1)(n^2 + 2)(n^2 + 3)$ も 3 つの連続する整数の積であるから 3 の倍数である. よって $P(n) = (n^2 - 1)^3 n^3 (n^2 + 1)(n^2 + 2)(n^2 + 3)$ は 3^4 の倍数である.

最後に $P(n)$ が 5 の倍数であることを示す. 連続する 5 つの整数のうち少なくとも 1 つは 5 の倍数であるから $(n^2 - 1)n^2(n^2 + 1)(n^2 + 2)(n^2 + 3)$ は 5 の倍数であり, $P(n) = (n^2 - 1)^3 n^3 (n^2 + 1)(n^2 + 2)(n^2 + 3)$ も 5 の倍数である.

$P(n)$ は 2^4 の倍数, 3^4 の倍数, かつ, 5 の倍数であり, 2, 3, 5 は互いに素であるから, $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 = 6480$ の倍数である.

$$\boxed{2} \quad (1) \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

I_1 を計算するために、 $t = \sin x$ として置換積分法を用いる。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ の範囲で $\cos x > 0$ であるから、 $\cos x = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$ となる。 よって $\frac{dt}{dx} = \cos x = \sqrt{1 - t^2}$ 。 故に

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} \left[-\log|1-t| + \log|1+t| \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\log\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\} = \frac{1}{2} \log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})^2 = \log(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

答え： $I_1 = \log(2+\sqrt{3})$, $I_2 = \sqrt{3}$.

(2) $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^{n+1} x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\tan x)'}{\cos^{n-1} x} dx = \left[\frac{\tan x}{\cos^{n-1} x} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \cdot (-\sin x)}{\cos^n x} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{(1/2)^{n-1}} - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+1} x} dx = 2^{n-1}\sqrt{3} - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^{n+1} x} dx \\ &= 2^{n-1}\sqrt{3} - (n-1)I_{n+1} + (n-1)I_{n-1}. \end{aligned}$$

従って $nI_{n+1} = 2^{n-1}\sqrt{3} + (n-1)I_{n-1}$ 。 故に $n \geq 2$ のとき

$$I_{n+1} = \frac{2^{n-1}\sqrt{3}}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-1}.$$

答え： $I_{n+1} = \frac{2^{n-1}\sqrt{3}}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-1} \quad (n \geq 2).$

(3) (2) の漸化式と (1) の計算結果より

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} I_1 = \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3}), \\ I_4 &= \frac{2^2\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3} I_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

答え： $I_3 = \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})$, $I_4 = 2\sqrt{3}$.

(4) $x = \frac{1}{2} \tan t$ と置いて、置換積分法を用いれば

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \sqrt{1+4x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 t}{4} \cdot \sqrt{1+\tan^2 t} \cdot \frac{1}{2\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{8\cos^5 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 t}{8\cos^5 t} dt = \frac{1}{8} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^5 t} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^3 t} \right) = \frac{1}{8} (I_5 - I_3). \end{aligned}$$

他方, (2) より $I_5 = 2\sqrt{3} + \frac{3}{4} \cdot I_3$ であるから, (3) より

$$I_5 - I_3 = 2\sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot I_3 = 2\sqrt{3} - \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{3}) \right\} = \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8} \log(2 + \sqrt{3}).$$

従って

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{8} (I_5 - I_3) = \frac{7\sqrt{3}}{32} - \frac{1}{64} \log(2 + \sqrt{3}).$$

$$\text{答え: } \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{7\sqrt{3}}{32} - \frac{1}{64} \log(2 + \sqrt{3}).$$

③ (1) 直線 BH が直線 AC と交わる点を P とし、直線 AH が直線 BC と交わる点を Q とする。
このとき

$$\angle ABP = \frac{\pi}{2} - \theta$$

となる。他方、 $\triangle ABC$ は $AB = AC (= 1)$ であるような二等辺三角形であるから

$$\angle PBC + \angle ABP = \angle ABC = \frac{1}{2}(\pi - \theta).$$

従って

$$\angle PBC + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{1}{2}(\pi - \theta). \quad \text{故に} \quad \angle PBC = \frac{\theta}{2}.$$

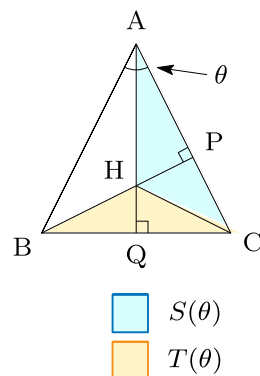
$HQ = BQ \cdot \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \tan \frac{\theta}{2}$ ということになるので、

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot HQ = \frac{1}{4} \cdot (BC)^2 \cdot \tan \frac{\theta}{2}.$$

余弦定理から $(BC)^2 = 1 + 1 - 2 \cos \theta = 2 - 2 \cos \theta$ であるから

$$T(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \tan \frac{\theta}{2} \quad \left(= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2 \sin \theta} \right).$$

$$\text{答え: } T(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{または} \quad T(\theta) = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2 \sin \theta} \text{ など.}$$



(2) (1)で示した通り、 $(BC)^2 = 2 - 2 \cos \theta$ であるから

$$QC = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \theta}.$$

従って

$$AQ = QC \cdot \tan \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \tan \frac{\pi - \theta}{2}.$$

よって $\triangle AQC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot QC \cdot AQ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \right)^2 \tan \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta) \tan \frac{\pi - \theta}{2}$$

であり、 $\triangle HQC$ の面積は

$$\frac{1}{2} T(\theta) = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta) \tan \frac{\theta}{2}$$

となる。故に

$$S(\theta) = \triangle AQC \text{ の面積} - \triangle HQC \text{ の面積} = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta) \left(\tan \frac{\pi - \theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} \right).$$

他方、

$$\tan \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

よって

$$\tan \frac{\pi - \theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}.$$

$\sin \theta > 0$ であるので, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, 従って $t = \cos \theta$ と置けば,

$$S(\theta) = \frac{1}{4}(1 - \cos \theta) \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta - \cos^2 \theta}{2 \sin \theta} = \frac{t(1 - t)}{2\sqrt{1 - t^2}}.$$

従って, $0 < t < 1$ の範囲で, 関数 $f(t) = \frac{t^2(1 - t)^2}{4(1 - t^2)} = \frac{t^2(1 - t)}{4(1 + t)}$ の最大値を求めればよい. $f(t)$ の導関数は

$$f'(t) = \frac{(2t - 3t^2)(1 + t) - (t^2 - t^3)}{4(1 + t)^2} = -\frac{t(t^2 + t - 1)}{2(1 + t)^2}.$$

このことから, $t_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ と置けば, $f(t)$ の増減は次の表のようになる:

t	0		t_0		1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

$t_0^2 = 1 - t_0$ であるから, $S(\theta)^2$ の最大値は

$$f(t_0) = \frac{t_0^2(1 - t_0)}{4(1 + t_0)} = \frac{(1 - t_0)^2}{4(1 + t_0)} = \frac{t_0^2 - 2t_0 + 1}{4(1 + t_0)} = \frac{2 - 3t_0}{4(1 + t_0)} = \frac{\frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{5\sqrt{5} - 11}{8}.$$

答え: $S(\theta)^2$ の最大値は $\frac{5\sqrt{5} - 11}{8}$.

(3) $t = \cos \theta$ と置けば, t は $0 < t < 1$ の範囲を動き, (2) で示した通り $S(\theta) = \frac{t(1 - t)}{2\sqrt{1 - t^2}}$ となる.

$$\frac{t(1 - t)}{2\sqrt{1 - t^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{12} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

かつ $0 < t < 1$ であるような t の範囲を求めればよい. ① の両辺を 2 乗して変形すれば,

$$12t^4 - 24t^3 + 13t^2 - 1 \geq 0.$$

左辺は $(t - 1)(12t^3 - 12t^2 + t + 1)$ と因数分解されるから

$$12t^3 - 12t^2 + t + 1 \leq 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

かつ $0 < t < 1$ であるような t の範囲を求めればよい. 更に ② の左辺は

$$(2t - 1)(6t^2 - 3t - 1) = (2t - 1)\left(t - \frac{3 + \sqrt{33}}{12}\right)\left(t - \frac{3 - \sqrt{33}}{12}\right)$$

のように変形 (因数分解) される. $0 < t < 1$ の範囲で $t - \frac{3 - \sqrt{33}}{12} > 0$ であるから, この範囲で ② が成り立つための必要十分条件は

$$(2t - 1)\left(t - \frac{3 + \sqrt{33}}{12}\right) \leq 0$$

(かつ $0 < t < 1$) となることである. よって求める $t = \cos \theta$ の範囲は, $\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{3 + \sqrt{33}}{12}$.

答え: 求める $\cos \theta$ の値の範囲は $\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{3 + \sqrt{33}}{12}$.
