

令和7年度入試（令和6年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜 前期日程
学部学科等	理（2科目選択）・工・都市デザイン学部
教科・科目名	数学／ 数学
正解・解答例 又は出題 （面接）意図	(解答例) 別紙のとおり 令和7年6月5日 大問1（2）に誤記があり差替えました。
備考	

【理(2科目選択)・工・都市デザイン学部】

① (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と書けるが, この ℓ が点 $B(-1, 0)$ を通るから. $0 = f'(a)(-1 - a) + f(a)$. 故に

$$f'(a) = \frac{f(a)}{1 + a} = a\sqrt{1 - a^2}. \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$f(x) = x(x + 1)\sqrt{1 - x^2} = (x^2 + x)\sqrt{1 - x^2}$ の導関数は

$$f'(x) = (2x + 1)\sqrt{1 - x^2} + (x^2 + x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-3x^3 - 2x^2 + 2x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

であるので, ②より $\frac{-3a^3 - 2a^2 + 2a + 1}{\sqrt{1 - a^2}} = f'(a) = a\sqrt{1 - a^2}$. この等式は

$$0 = 2a^3 + 2a^2 - a - 1 = (a + 1)(2a^2 - 1)$$

と変形される. $0 < a < 1$ であるから $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ でなければならない. これを②と $f(x)$ の定義式に代入して, $f'(a) = \frac{1}{2}$, $f(a) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ を得る. このことと①より, 接線 ℓ の方程式は

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}(x + 1).$$

答え: 接線 ℓ の方程式は $\frac{1}{2}(x + 1)$.

(2) $y = f(x)$ と ℓ との交点を求める. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$ とすると

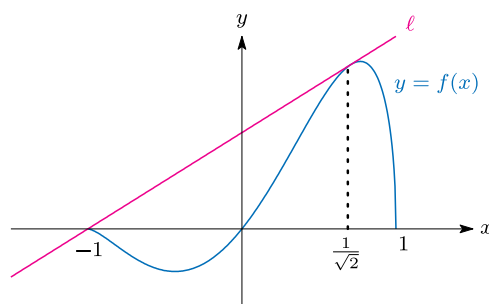
$$(x + 1)(2x\sqrt{1 - x^2} - 1) = 0$$

$x \neq -1$ であれば $2x\sqrt{1 - x^2} = 1$ となり, 両辺を2乗して

$$4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

を得る. すなわち $(2x^2 - 1)^2 = 0$. 故に $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ であ

るが, $-1 < x < 0$ のときは, $f(x) < 0 < \frac{1}{2}(x + 1)$ となるので, $-1 < x < 0$ の範囲では $y = f(x)$ と ℓ は交わらない. 従って $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 以上のことから, $y = f(x)$ と ℓ の交点は, $(-1, f(-1))$ と $(1/\sqrt{2}, f(1/\sqrt{2}))$ の2点のみである. ($y = f(x)$ と ℓ を図示すれば上図のようになる)



よって $I = \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x) dx$ と置けば, 接線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \frac{1}{2}(x + 1) - f(x) \right\} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - I = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} - I$$

と表される． $x = \cos \theta$ と置いて置換積分法を用れば

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x(x+1)\sqrt{1-x^2} dx = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \cdot (1 + \cos \theta) \cdot |\sin \theta| \cdot (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{3} \left[\sin^3 \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{8} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{3}{32} \pi. \end{aligned}$$

よって

$$S = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} - I = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{3}{32} \pi = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{3}{32} \pi.$$

答え： ℓ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積は $\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{3}{32} \pi$.

〔2〕 (1) 直線 BH が直線 AC と交わる点を P とし、直線 AH が直線 BC と交わる点を Q とする。
このとき

$$\angle ABP = \frac{\pi}{2} - \theta$$

となる。他方、 $\triangle ABC$ は $AB = AC (= 1)$ であるような二等辺三角形であるから

$$\angle PBC + \angle ABP = \angle ABC = \frac{1}{2}(\pi - \theta).$$

従って

$$\angle PBC + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{1}{2}(\pi - \theta). \quad \text{故に} \quad \angle PBC = \frac{\theta}{2}.$$

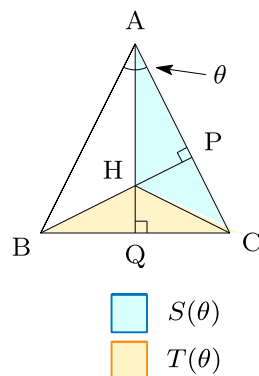
$HQ = BQ \cdot \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \tan \frac{\theta}{2}$ ということになるので、

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot HQ = \frac{1}{4} \cdot (BC)^2 \cdot \tan \frac{\theta}{2}.$$

余弦定理から $(BC)^2 = 1 + 1 - 2 \cos \theta = 2 - 2 \cos \theta$ であるから

$$T(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \tan \frac{\theta}{2} \quad \left(= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2 \sin \theta} \right).$$

$$\text{答え: } T(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{または} \quad T(\theta) = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2 \sin \theta} \text{ など.}$$



(2) (1)で示した通り、 $(BC)^2 = 2 - 2 \cos \theta$ であるから

$$QC = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \theta}.$$

従って

$$AQ = QC \cdot \tan \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \tan \frac{\pi - \theta}{2}.$$

よって $\triangle AQC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot QC \cdot AQ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \right)^2 \tan \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta) \tan \frac{\pi - \theta}{2}$$

であり、 $\triangle HQC$ の面積は

$$\frac{1}{2} T(\theta) = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta) \tan \frac{\theta}{2}$$

となる。故に

$$S(\theta) = \triangle AQC \text{ の面積} - \triangle HQC \text{ の面積} = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta) \left(\tan \frac{\pi - \theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} \right).$$

他方、

$$\tan \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

よって

$$\tan \frac{\pi - \theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}.$$

$\sin \theta > 0$ であるので, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, 従って $t = \cos \theta$ と置けば,

$$S(\theta) = \frac{1}{4}(1 - \cos \theta) \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta - \cos^2 \theta}{2 \sin \theta} = \frac{t(1 - t)}{2\sqrt{1 - t^2}}.$$

従って, $0 < t < 1$ の範囲で, 関数 $f(t) = \frac{t^2(1 - t)^2}{4(1 - t^2)} = \frac{t^2(1 - t)}{4(1 + t)}$ の最大値を求めればよい. $f(t)$ の導関数は

$$f'(t) = \frac{(2t - 3t^2)(1 + t) - (t^2 - t^3)}{4(1 + t)^2} = -\frac{t(t^2 + t - 1)}{2(1 + t)^2}.$$

このことから, $t_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ と置けば, $f(t)$ の増減は次の表のようになる:

t	0		t_0		1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

$t_0^2 = 1 - t_0$ であるから, $S(\theta)^2$ の最大値は

$$f(t_0) = \frac{t_0^2(1 - t_0)}{4(1 + t_0)} = \frac{(1 - t_0)^2}{4(1 + t_0)} = \frac{t_0^2 - 2t_0 + 1}{4(1 + t_0)} = \frac{2 - 3t_0}{4(1 + t_0)} = \frac{\frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{5\sqrt{5} - 11}{8}.$$

答え: $S(\theta)^2$ の最大値は $\frac{5\sqrt{5} - 11}{8}$.

(3) $t = \cos \theta$ と置けば, t は $0 < t < 1$ の範囲を動き, (2) で示した通り $S(\theta) = \frac{t(1 - t)}{2\sqrt{1 - t^2}}$ となる.

$$\frac{t(1 - t)}{2\sqrt{1 - t^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{12} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

かつ $0 < t < 1$ であるような t の範囲を求めればよい. ① の両辺を 2 乗して変形すれば,

$$12t^4 - 24t^3 + 13t^2 - 1 \geq 0.$$

左辺は $(t - 1)(12t^3 - 12t^2 + t + 1)$ と因数分解されるから

$$12t^3 - 12t^2 + t + 1 \leq 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

かつ $0 < t < 1$ であるような t の範囲を求めればよい. 更に ② の左辺は

$$(2t - 1)(6t^2 - 3t - 1) = (2t - 1)\left(t - \frac{3 + \sqrt{33}}{12}\right)\left(t - \frac{3 - \sqrt{33}}{12}\right)$$

のように変形 (因数分解) される. $0 < t < 1$ の範囲で $t - \frac{3 - \sqrt{33}}{12} > 0$ であるから, この範囲で ② が成り立つための必要十分条件は

$$(2t - 1)\left(t - \frac{3 + \sqrt{33}}{12}\right) \leq 0$$

(かつ $0 < t < 1$) となることである. よって求める $t = \cos \theta$ の範囲は, $\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{3 + \sqrt{33}}{12}$.

答え: 求める $\cos \theta$ の値の範囲は $\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{3 + \sqrt{33}}{12}$.

③ (1) 1 回ゲームをするとき、白玉を取り出す確率は $\frac{7}{10}$ であり、赤玉または青玉を取り出す事象は、白玉を取り出す事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

答え： 1 回ゲームをして、赤玉または青玉を取り出す確率は $\frac{3}{10}$.

(2) 1 回ゲームをして白玉を取り出さない確率は $\frac{3}{10}$ であるから、5 回ゲームをして 5 回とも白玉を取り出さない確率は $\left(\frac{3}{10}\right)^5$. 5 回ゲームをするとき、少なくとも 1 回白玉を取り出す事象は、5 回とも白玉を取り出さない事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \left(\frac{3}{10}\right)^5 = \frac{99757}{100000}$$

答え： 5 回ゲームをして、少なくとも 1 回白玉を取り出す確率は $\frac{99757}{100000}$.

(3) 5 回ゲームをして、得点が 500 点に満たない確率、すなわち、5 回とも青玉を取り出さない確率は $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ である. また、5 回ゲームをして、各 k 回目だけに 500 点獲得する確率は

$$\left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{9^4}{10^5}$$

従って、得点が 500 点以上 1000 点未満である確率は ${}_5C_1 \cdot \frac{9^4}{10^5} = 5 \cdot \frac{9^4}{10^5} = \frac{5 \cdot 9^4}{10^5}$. 以上のことから、得点が 1000 点より大きくなる確率は、

$$1 - \frac{9^5}{10^5} - \frac{5 \cdot 9^4}{10^5} = \frac{100000 - 9^5 - 5 \cdot 9^4}{100000} = \frac{8146}{100000} = \frac{4073}{50000}.$$

答え： 5 回ゲームをして、合計得点が 1000 点より大きい確率は $\frac{4073}{50000}$.
