（様式）

入試情報の開示

入試の区分	一般選抜後期日程
入試年度	令和８年度（令和７年度実施）
学部学科等	理学部　都市デザイン学部地球システム科学科・都市・交通デザイン学科
教科・科目名	数学／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ・数Ｃ
出題意図	問１．微積分や図形の軌跡などの基本的な取り扱いが出来るかを問う。 問２．微積分を通してグラフの領域の面積の計算が出来るか，および整数の取り扱いが出来るかを問う。 問３．確率や漸化式の取り扱いが出来るかを問う。
解答又は解答例	別紙の通り。

$\boxed{1}$ (1)

$g(x) = \sin x$ とおく。$g'(x) = \cos x$ である。

x	$0 \to \frac{\pi}{6}$
$g(x)$	$0 \to \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{(1+\sin x)\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin^2 x)}\cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{g(x)}{(1+g(x))(1-g(x)^2)}g'(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u}{(1+u)(1-u^2)}du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u}{(1+u)^2(1-u)}du$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+u}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right)\right\}du$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) - \frac{1}{2(1+u)^2}\right\}du$$

$$= \left[-\frac{\log(1-u)}{4} + \frac{\log(1+u)}{4} + \frac{1}{2(1+u)}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(-\frac{-\log 2}{4} + \frac{\log 3 - \log 2}{4} + \frac{1}{3}\right) - \left(-0 + 0 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\log 3}{4} - \frac{1}{6}$$

答え：　$\frac{\log 3}{4} - \frac{1}{6}$

(2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k & \cdots\cdots ① \\ (x-3)^2 + y^2 = 4k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② より，

$$\begin{aligned} 6x - 9 &= -3k \\ x &= -\tfrac{k-3}{2} \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

①−6×③＝② であるので，① と ② の連立方程式は ① と ③ の連立方程式と同値である。

③ を ① に代入する。

$$
\begin{aligned}
y^2 &= k - x^2 \\
y^2 &= k - \left(-\tfrac{k-3}{2}\right)^2 \\
y^2 &= -2\left(-\tfrac{k-3}{2}\right) + 3 - \left(-\tfrac{k-3}{2}\right)^2 \\
y^2 &= 4 - \left\{\left(-\tfrac{k-3}{2}\right) + 1\right\}^2 \ \cdots\cdots ④
\end{aligned}
$$

$1 < k < 9$ であるから④の右辺は正である。よって，

$$
\begin{aligned}
&P\left(-\frac{k-3}{2},\ \sqrt{4 - \left\{\left(-\frac{k-3}{2}\right) + 1\right\}^2}\right) \qquad (-1 < k < 9) \\
&Q\left(-\frac{k-3}{2},\ -\sqrt{4 - \left\{\left(-\frac{k-3}{2}\right) + 1\right\}^2}\right) \qquad (-1 < k < 9)
\end{aligned}
$$

$1 < k < 9$ より

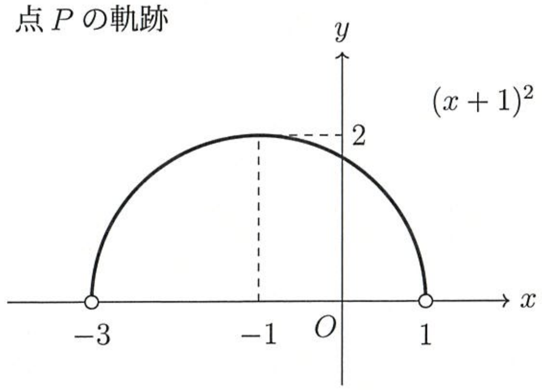
$$-3 < x < 1$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&P\left(x,\ \sqrt{4 - (x+1)^2}\right) \qquad (-3 < x < 1) \\
&Q\left(x,\ -\sqrt{4 - (x+1)^2}\right) \qquad (-3 < x < 1)
\end{aligned}
$$

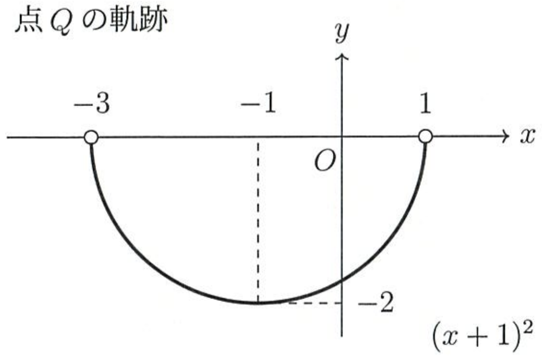
答え：　P，Q の軌跡は次の通りである。

点 P の軌跡



$(x+1)^2+y^2=4\,(y>0)$

点 Q の軌跡



$(x+1)^2+y^2=4\,(y<0)$

$\boxed{2}$ (1)

$x^2+1=\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2+1=\dfrac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}=\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2$ である。

$\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}>0$ であるから，$\sqrt{x^2+1}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ である。

答え： $\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$

(2)

x を $x(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ と変数変換する。$x'(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ である。

(1) より $x(t)+\sqrt{x(t)^2+1}=e^t$ である。よって $t=\log(x(t)+\sqrt{x(t)^2+1})$ である。

$$
\begin{aligned}
&\int\sqrt{x^2+1}dx=\int\sqrt{x(t)^2+1}\cdot x'(t)dt\\
&=\int\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt=\frac{1}{4}\int(e^{2t}+2+e^{-2t})dt\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2}+2t-\frac{e^{-2t}}{2}\right)+D\quad（D \text{ は積分定数}）\\
&=\frac{1}{2}x(t)\sqrt{x(t)^2+1}+\frac{1}{2}\log(x(t)+\sqrt{x(t)^2+1})+D\\
&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})+D
\end{aligned}
$$

答え： $\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})+D$ （D は積分定数）

(3)　x は自然数であり，$x^2+y^2\leqq(4\sqrt{5})^2=80$ であるから $1\leqq x\leqq 8$ である。$x^2=2y^2-1$ より x は奇数である。$x=1$ のとき $y=1$ である。$x=3$ または $x=5$ を満たす解 (x,y) はない。$x=7$ のとき $y=5$ である。

答え： $(1,1)$，$(7,5)$

(4)　$P(1,1)$, $Q(7,5)$ である。直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{2x+1}{3}$ である。

C の $y>0$ での方程式は $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$ である。

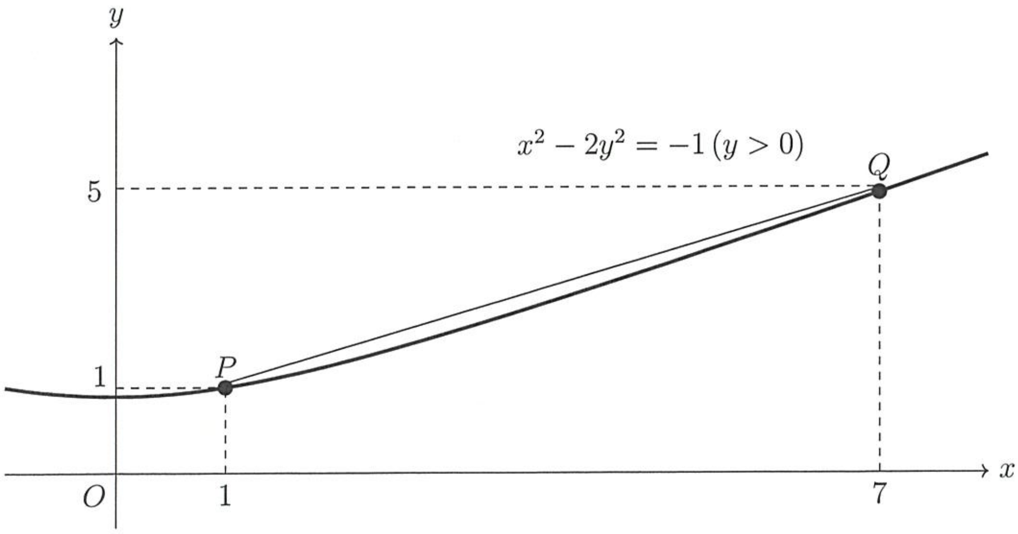
$$\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$$
$$\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\right)'' = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} > 0$$

よって $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$ のグラフは下に凸である。

求める面積は次の通りである。

$$\begin{aligned}
&\int_1^7 \left(\frac{2x+1}{3} - \sqrt{\frac{x^2+1}{2}}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2+x}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})\right)\right]_1^7 \\
&= \left\{\frac{56}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(7\sqrt{50} + \log(7+\sqrt{50})\right)\right\} \\
&\qquad\qquad - \left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right)\right\} \\
&= \frac{56-2}{3} + \frac{-35+1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{2}}{7+5\sqrt{2}} \\
&= 18 - 17 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\{(1+\sqrt{2})(5\sqrt{2}-7)\} \\
&= 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\{(3-2\sqrt{2})\} \\
&= 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\{(\sqrt{2}-1)^2\} \\
&= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\log(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

答え：　$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\log(\sqrt{2}-1)$



y
$x^2 - 2y^2 = -1\,(y > 0)$
Q
5
P
1
O
1
7
x

$\boxed{3}$ (1)

$$p_{k+1} = p_k \times \frac{1}{2} + r_k \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p_k + \frac{1}{2}(1 - p_k - q_k) = -\frac{1}{2}q_k + \frac{1}{2}$$
$$q_{k+1} = q_k \times \frac{1}{2} + r_k \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}q_k + \frac{1}{2}(1 - p_k - q_k) = -\frac{1}{2}p_k + \frac{1}{2}$$

答え：　$p_{k+1} = -\frac{1}{2}q_k + \frac{1}{2}$，$q_{k+1} = -\frac{1}{2}p_k + \frac{1}{2}$

(2)

$a_k = p_k + q_k$ および $b_k = p_k - q_k$ とおく。

$a_1 = p_1 + q_1 = 1 + 0 = 1$ である。$b_1 = p_1 - q_1 = 1 + 0 = 1$ である。

(1) より $1 < k \leqq n$ のとき $a_k = -\frac{1}{2}a_{k-1} + 1$ および $b_k = \frac{1}{2}b_{k-1}$ である。

$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

$1 \leqq k \leqq n$ のとき $c_k = a_k - \frac{2}{3}$ とおく。

$1 < k \leqq n$ のとき $c_k = \left(-\frac{1}{2}\right) c_{k-1}$ であるので

$c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{3}$ である。

よって $a_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$ である。

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$
$$q_n = \frac{a_n - b_n}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$
$$r_n = 1 - p_n - q_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$

答え：　$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3},\ q_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3},$

$r_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(p_k + 2q_k + 3r_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{2}\right)^k + 2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + 2n \\
&= 2n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \\
&= 2n + 2^{-n} + \frac{(-2)^{-n}}{3} - \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

答え：　$2n + 2^{-n} + \frac{(-2)^{-n}}{3} - \frac{4}{3}$