（様式）

入試情報の開示

入試の区分	一般選抜　前期日程
入試年度	令和８年度（令和７年度実施）
学部学科等	理学（１科目選択）・医学・薬学部
教科・科目名	数学
出題意図	高等学校で学ぶ数学についての基礎的な知識や理解度、論理的思考力、応用力を問う。 第1問　3 次方程式・文字式・命題と数学的帰納法に関する理解度を確認する。 第2問　三角関数や連続関数の積分に関する理解度を確認する。 第3問　平面図形と三角比に関する理解度を確認する。
解答又は解答例	（解答例） 別紙のとおり

【理（１科目選択）・医・薬学部　解答例（略解）】

$\boxed{1}$

（1）

$$f(x)=(x-2)(x^2-x-1)$$

より方程式 $f(x)=0$ の解は

$$x=2,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$2<\sqrt{5}<3$ より

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2$$

よって

$$p=2,\ q=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ r=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

（2）（a）

$$a_1=A+B+C=3 \qquad \cdots ①$$

$$a_2=2A+\frac{1}{2}(B+C)+\frac{\sqrt{5}}{2}(B-C)=0 \qquad \cdots ②$$

$$a_3=4A+\frac{3}{2}(B+C)+\frac{\sqrt{5}}{2}(B-C)=2 \qquad \cdots ③$$

A,B,C は有理数，$\sqrt{5}$ は無理数なので，②（または③）より $B=C$

このとき①，②，③は

$$A+2B=3 \qquad \cdots ①'$$

$$2A+B=0 \qquad \cdots ②'$$

$$4A+3B=2 \qquad \cdots ③'$$

となる。①$'$，②$'$ を解くと $A=-1,B=2$

これは ③$'$ も満たす。したがって

$$A=-1,B=2,C=2$$

（b）（$\Longrightarrow$）すべての正の整数 n に対して a_n は整数であると仮定する。

$$a_1=A+B+C \qquad \cdots ①$$

$$a_2=2A+\frac{1}{2}(B+C)+\frac{\sqrt{5}}{2}(B-C) \qquad \cdots ②$$

$$a_3=4A+\frac{3}{2}(B+C)+\frac{\sqrt{5}}{2}(B-C) \qquad \cdots ③$$

②で a_2 は整数だから $B=C$ であり

$$a_1=A+2B$$
$$a_2=2A+B$$
$$a_3=4A+3B$$

となり

$$B=4A+3B-2(2A+B)=a_3-2a_2$$
$$A=4A+3B-(3A+3B)=a_3-(a_1+a_2)$$

であるから，A,B,C はすべて整数かつ $B=C$ である。

（$\Longleftarrow$）A,B,C がすべて整数かつ $B=C$ であると仮定する。

$$\begin{aligned}a_n&=Ap^{n-1}+B(q^{n-1}+r^{n-1})\\&=A\times 2^{n-1}+B(q^{n-1}+r^{n-1})\end{aligned}$$

すべての正の整数 n に対して $A\times 2^{n-1}$ が整数であることは明らか。よってすべての正の整数 n に対して

$$I_n=q^{n-1}+r^{n-1}$$

が整数であることを示せば十分である。

① $n=1$ と $n=2$ のとき

$$I_1=q^0+r^0=2$$
$$I_2=q+r=1$$

であるから，$n=1,2$ のときは正しい。

② $n-1$ まで正しいと仮定する。

$q^2=q+1$，$r^2=r+1$ なので，I_n は

$$\begin{aligned}I_n&=q^{n-1}+r^{n-1}\\&=q^{n-3}q^2+r^{n-3}r^2\\&=q^{n-3}(q+1)+r^{n-3}(r+1)\\&=q^{n-2}+r^{n-2}+q^{n-3}+r^{n-3}\\&=I_{n-1}+I_{n-2}\end{aligned}$$

であり，仮定より I_{n-1},I_{n-2} は整数であるから，I_n も整数である。

③ したがって，すべての正の整数 n に対して，I_n は整数である。

$\boxed{2}$

(1) $f_n(x)$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ で連続なので

$$f_n(0) = \lim_{x\to+0} f_n(x), \quad f_n(\pi) = \lim_{x\to\pi-0} f_n(x)$$

である。

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \lim_{x\to+0} \frac{\sin nx}{\sin x} \\ &= \lim_{x\to+0} n\frac{\sin nx}{nx}\frac{x}{\sin x} \\ &= n\end{aligned}$$

$y = \pi - x$ とおくと，$x \to \pi - 0$ のとき $y \to +0$ である。

$$\begin{aligned}\beta_n &= \lim_{x\to\pi-0} \frac{\sin nx}{\sin x} \\ &= \lim_{y\to+0} \frac{\sin n(\pi - y)}{\sin(\pi - y)} \\ &= \lim_{y\to+0} \frac{-\cos n\pi \sin ny}{-\cos\pi \sin y} \\ &= (-1)^{n+1} \lim_{y\to+0} \frac{\sin ny}{\sin y} \\ &= (-1)^{n+1} n\end{aligned}$$

(2)

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^\pi \{f_{n+2}(x) - f_n(x)\}\,dx$$

$0 < x < \pi$ のとき

$$f_{n+2}(x) - f_n(x) = \frac{\sin(n+2)x - \sin nx}{\sin x}$$

加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(n+2)x &= \sin((n+1)x + x) \\ &= \sin(n+1)x\,\cos x + \cos(n+1)x\,\sin x \\ \sin nx &= \sin((n+1)x - x) \\ &= \sin(n+1)x\,\cos x - \cos(n+1)x\,\sin x\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}f_{n+2}(x) - f_n(x) &= \frac{2\cos(n+1)x\,\sin x}{\sin x} \\ &= 2\cos(n+1)x\end{aligned}$$

また $f_n(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}f_{n+2}(0) - f_n(0) &= (n+2) - n = 2 = 2\cos((n+1)\times 0) \\ f_{n+2}(\pi) - f_n(\pi) &= (-1)^{n+3}(n+2) - (-1)^{n+1}n \\ &= (-1)^{n+1}2 = 2\cos(n+1)\pi\end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して

$$f_{n+2}(x) - f_n(x) = 2\cos(n+1)x$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}I_{n+2} - I_n &= \int_0^\pi 2\cos(n+1)x\,dx \\ &= \left[2\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n+1}(\sin(n+1)\pi - \sin 0) = 0\end{aligned}$$

(3)

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^\pi \left[\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2\right] dx$$

$0 < x < \pi$ のとき

$$\begin{aligned}&\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 \\ &= \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2(n+1)x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\cos(2n+2)x + \cos 2nx}{2\sin^2 x}\end{aligned}$$

加法定理より

$$\begin{aligned}\cos(2n+2)x &= \cos((2n+1)x + x) \\ &= \cos(2n+1)x\,\cos x - \sin(2n+1)x\,\sin x \\ \cos 2nx &= \cos((2n+1)x - x) \\ &= \cos(2n+1)x\,\cos x + \sin(2n+1)x\,\sin x\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 &= \frac{2\sin(2n+1)x\,\sin x}{2\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \\ &= f_{2n+1}(x)\end{aligned}$$

また $f_n(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}\{f_{n+1}(0)\}^2 - \{f_n(0)\}^2 &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= 2n + 1 = f_{2n+1}(0) \\ \{f_{n+1}(\pi)\}^2 - \{f_n(\pi)\}^2 &= \{(-1)^{n+2}(n+1)\}^2 - \{(-1)^{n+1}n\}^2 \\ &= 2n+1 \\ &= (-1)^{2n+2}(2n+1) = f_{2n+1}(\pi)\end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して

$$\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 = f_{2n+1}(x)$$

が成り立つ。よって

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^\pi f_{2n+1}(x)\,dx = I_{2n+1} \qquad \cdots ①$$

ここで（2）より

$$I_{2n+1} = I_1 = \int_0^\pi dx = \pi \qquad \cdots ②$$

よって①と②より

$$J_{n+1} - J_n = \pi$$

(4)（3）より

$$J_{n+1} - J_n = \pi$$

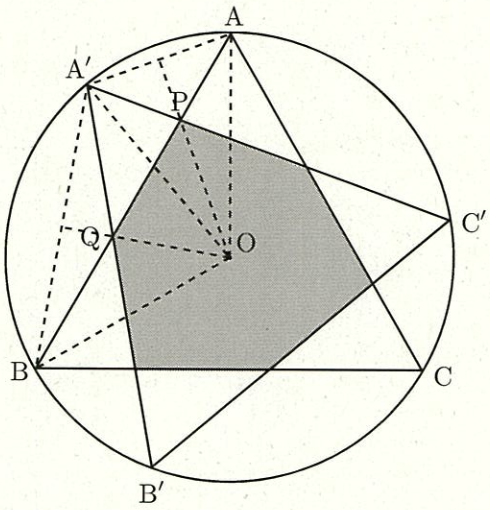
また

$$J_1 = \int_0^\pi dx = \pi$$

よって $\{J_n\}$ は公差 π，初項 π の等差数列なので

$$J_n = J_1 + (n-1)\pi = n\pi$$

3



(1) 円周角の定理により

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{AA'C'} &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOC'}\\ &= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{AOC} - \angle \mathrm{COC'})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)\\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{A'AB} &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{A'OB}\\ &= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{A'OB'} - \angle \mathrm{B'OB})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)\\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

(2) $\triangle \mathrm{PAA'}$ は (1) より $\angle \mathrm{PAA'} = \angle \mathrm{PA'A}$ なので二等辺三角形であり，$\mathrm{A'P} = \mathrm{AP}$ である。
$\triangle \mathrm{AOP}$ と $\triangle \mathrm{A'OP}$ は

$$\mathrm{AP} = \mathrm{A'P},\ \mathrm{AO} = \mathrm{A'O},\ \mathrm{OP}\text{ は共通}$$

なので合同であり

$$\angle \mathrm{A'OP} = \angle \mathrm{AOP} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOA'} = \frac{\theta}{2}$$

線分 $\mathrm{AA'}$ の中点を M とする。直角三角形 $\mathrm{OA'M}$ において

$$\mathrm{A'M} = \mathrm{OA'}\sin\angle \mathrm{A'OM} = \sin\frac{\theta}{2} \quad \cdots ①$$

直角三角形 $\mathrm{PA'M}$ において

$$\frac{\mathrm{A'M}}{\mathrm{A'P}} = \cos\angle \mathrm{PA'M} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \cdots ②$$

①と②より

$$\mathrm{A'P} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

同様に，線分 $\mathrm{A'B}$ の中点を N として，直角三角形 $\mathrm{OA'N}$ において

$$\mathrm{A'N} = \mathrm{OA'}\sin\angle \mathrm{A'ON} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \cdots ③$$

直角三角形 $\mathrm{QA'N}$ において

$$\frac{\mathrm{A'N}}{\mathrm{A'Q}} = \cos\angle \mathrm{QA'N} = \cos\frac{\theta}{2} \quad \cdots ④$$

③と④より

$$\mathrm{A'Q} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

(3) $S(\theta)$ は $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ の面積から，$\triangle \mathrm{A'PQ}$ およびそれに合同な他の2つの三角形の面積を引いたものである。

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{A'B'C'}\text{の面積} &= \frac{1}{2}\mathrm{B'C'} \times \mathrm{A'B'}\sin\angle \mathrm{A'B'C'}\\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\\ \triangle \mathrm{A'PQ}\text{ の面積} &= \frac{1}{2}\mathrm{A'P} \times \mathrm{A'Q}\sin\angle \mathrm{QA'P}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\tan\frac{\theta}{2}\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(\theta) &= (\triangle \mathrm{A'B'C'}\text{の面積}) - 3 \times (\triangle \mathrm{A'PQ}\text{ の面積})\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\tan\frac{\theta}{2}\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\left\{1 - \tan\frac{\theta}{2}\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)\right\}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\left\{1 - x\frac{\sqrt{3} - x}{1 + \sqrt{3}x}\right\}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{1 + x^2}{1 + \sqrt{3}x}\end{aligned}$$

(4) 変数変換 $x = \tan\frac{\theta}{2}$ を用いる。このとき

$$d\theta = \frac{2}{1 + x^2}dx \qquad \begin{array}{c|ccc}\theta & \frac{\pi}{3} & \to & \frac{\pi}{2}\\ \hline x & \frac{1}{\sqrt{3}} & \to & 1\end{array}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} S(\theta)\,d\theta &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1 + x^2}{1 + \sqrt{3}x}\frac{2}{1 + x^2}dx\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{1 + \sqrt{3}x}dx\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\log(1 + \sqrt{3}x)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\\ &= \frac{3}{2}\left(\log(1 + \sqrt{3}) - \log 2\right)\\ &= \frac{3}{2}\log\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$