

(様式)

入試情報の開示

入試の区分	一般選抜 前期日程
入試年度	令和8年度(令和7年度実施)
学部学科等	理学(2科目選択)・工学・都市デザイン学部
教科・科目名	数学
出題意図	<p>高等学校で学ぶ数学についての基礎的な知識や理解度、論理的思考力、応用力を問う。</p> <p>第1問 微分や級数・極限に関する理解度を確認する。 第2問 三角関数や積分に関する理解度を確認する。 第3問 文字式と場合の数・確率に関する理解度を確認する。</p>
解答又は解答例	<p>(解答例) 別紙のとおり</p>

1

(1) $\tan f(x)$ は $y = f(x)$ と $\tan y$ の合成関数なので、その導関数は、 $(\tan y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$ より

$$\begin{aligned} (\tan f(x))' &= \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x) \\ &= (1 + \tan^2 f(x)) f'(x) \end{aligned}$$

また、 $\tan f(x) = x^2 + x + 1$ を微分すると

$$(\tan f(x))' = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x + 1}{1 + \tan^2 f(x)} \\ &= \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2 + 1} \end{aligned}$$

(2) $(x^2 + x + 1)^2 + 1 = 0$ は $x = \pm i$ を解にもつので、与式は $x^2 + 1$ を因子にもつ。

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)^2 + 1 &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

である。

$x^2 + 1$ および $x^2 + 2x + 2$ は係数が整数の範囲では因数分解できない。

したがって

$$(x^2 + x + 1)^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$$

(3) $(\tan f(x))' = 2x + 1$ だから

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= a((x + 1)^2 + 1) + b(x^2 + 1) \\ &= a(x^2 + 2x + 2) + b(x^2 + 1) \\ &= (a + b)x^2 + 2ax + 2a + b \end{aligned}$$

両辺の x^2 の係数、 x の係数、定数項をそれぞれ比べて

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

したがって

$$a = 1, b = -1$$

(4) (1) より

$$f'(k) = \frac{2k + 1}{(k^2 + k + 1)^2 + 1}$$

この分母は (2) より因数分解でき

$$f'(k) = \frac{2k + 1}{(k^2 + 1)(k^2 + 2k + 2)}$$

また (3) を用いて分子を書きかえると

$$\begin{aligned} f'(k) &= \frac{((k + 1)^2 + 1) - (k^2 + 1)}{(k^2 + 1)(k^2 + 2k + 2)} \\ &= \frac{g(k + 1) - g(k)}{g(k)g(k + 1)} \\ &= \frac{1}{g(k)} - \frac{1}{g(k + 1)} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N f'(k) &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{g(k)} - \frac{1}{g(k + 1)} \right) \\ &= -\frac{1}{g(N + 1)} + \frac{1}{g(1)} \\ &= -\frac{1}{(N + 1)^2 + 1} + \frac{1}{2} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f'(k) = \frac{1}{2}$$

2

(1)

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^\pi \{f_{n+2}(x) - f_n(x)\} dx$$

$0 < x < \pi$ のとき

$$f_{n+2}(x) - f_n(x) = \frac{\sin(n+2)x - \sin nx}{\sin x}$$

加法定理より

$$\begin{aligned} \sin(n+2)x &= \sin((n+1)x + x) \\ &= \sin(n+1)x \cos x + \cos(n+1)x \sin x \\ \sin nx &= \sin((n+1)x - x) \\ &= \sin(n+1)x \cos x - \cos(n+1)x \sin x \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) - f_n(x) &= \frac{2 \cos(n+1)x \sin x}{\sin x} \\ &= 2 \cos(n+1)x \end{aligned}$$

また $f_n(x)$ の定義より

$$\begin{aligned} f_{n+2}(0) - f_n(0) &= (n+2) - n = 2 = 2 \cos((n+1) \times 0) \\ f_{n+2}(\pi) - f_n(\pi) &= (-1)^{n+3}(n+2) - (-1)^{n+1}n \\ &= (-1)^{n+1}2 = 2 \cos(n+1)\pi \end{aligned}$$

したがって、 $0 \leq x \leq \pi$ に対して

$$f_{n+2}(x) - f_n(x) = 2 \cos(n+1)x$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} I_{n+2} - I_n &= \int_0^\pi 2 \cos(n+1)x dx \\ &= \left[2 \frac{\sin(n+1)x}{n+1} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n+1} (\sin(n+1)\pi - \sin 0) = 0 \end{aligned}$$

(2)

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^\pi [\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2] dx$$

$0 < x < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} \{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 &= \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2(n+1)x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\cos(2n+2)x + \cos 2nx}{2 \sin^2 x} \end{aligned}$$

加法定理より

$$\begin{aligned} \cos(2n+2)x &= \cos((2n+1)x + x) \\ &= \cos(2n+1)x \cos x - \sin(2n+1)x \sin x \\ \cos 2nx &= \cos((2n+1)x - x) \\ &= \cos(2n+1)x \cos x + \sin(2n+1)x \sin x \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 &= \frac{2 \sin(2n+1)x \sin x}{2 \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \\ &= f_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

また $f_n(x)$ の定義より

$$\begin{aligned} \{f_{n+1}(0)\}^2 - \{f_n(0)\}^2 &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= 2n+1 = f_{2n+1}(0) \\ \{f_{n+1}(\pi)\}^2 - \{f_n(\pi)\}^2 &= \{(-1)^{n+2}(n+1)\}^2 - \{(-1)^{n+1}n\}^2 \\ &= 2n+1 \\ &= (-1)^{2n+2}(2n+1) = f_{2n+1}(\pi) \end{aligned}$$

したがって、 $0 \leq x \leq \pi$ に対して

$$\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 = f_{2n+1}(x)$$

が成り立つ。よって

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^\pi f_{2n+1}(x) dx = I_{2n+1}$$

(3) (2) より

$$J_{n+1} - J_n = I_{2n+1}$$

(1) より

$$I_{2n+1} = I_1 = \int_0^\pi dx = \pi$$

また

$$J_1 = \int_0^\pi dx = \pi$$

よって $\{J_n\}$ は公差 π 、初項 π の等差数列なので

$$J_n = J_1 + (n-1)\pi = n\pi$$

3

(1) (a)

$$S = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

(b)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \\ = (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

より

$$S = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

したがって

$$\begin{aligned} S \text{ が } 3 \text{ の倍数} &\iff (x + y + z)^3 \text{ が } 3 \text{ の倍数} \\ &\iff x + y + z \text{ が } 3 \text{ の倍数} \end{aligned}$$

以上より題意は示された。

(c) x, y, z のうちの偶数の個数について場合分けする。

[偶数が3つのとき]

x, y, z はすべて偶数なので、 $S = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ も偶数。

[偶数が2つのとき]

x^3, y^3, z^3 のうち偶数は2個、奇数は1個なので $x^3 + y^3 + z^3$ は奇数。 $3xyz$ は偶数なので、 $S = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ は奇数。

[偶数が1つのとき]

x^3, y^3, z^3 のうち偶数は1個、奇数は2個なので $x^3 + y^3 + z^3$ は偶数。 $3xyz$ は偶数なので、 $S = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ も偶数。

[偶数がないとき]

x, y, z はすべて奇数なので、 $x^3 + y^3 + z^3$ も奇数、 $3xyz$ も奇数。よって $S = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ は偶数。

以上の4つの場合ですべてが尽くされ、 S が奇数であるのは、偶数が2つのときしかないので

$$S \text{ が奇数} \iff x, y, z \text{ のうち } 2 \text{ つが偶数, } 1 \text{ つが奇数}$$

(2) (a)

(1) の (a) より

$$\begin{aligned} T &= (p + q + r)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp) \\ &= (p + q + r) \frac{1}{2} \{(p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} T = 0 &\iff p = q = r \\ &\iff (p, q, r) = (1, 1, 1), (2, 2, 2), \\ &\quad (3, 3, 3), (4, 4, 4), \\ &\quad (5, 5, 5), (6, 6, 6) \end{aligned}$$

よって $T = 0$ となる場合の数は6通りなので、求める確率は

$$\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

(b) (1) の (b) と (c) および (2) の (a) より

T が正の数かつ6の倍数

$$\iff \begin{cases} p = q = r \text{ でない} \\ p + q + r \text{ が } 3 \text{ の倍数} \\ p, q, r \text{ のうち偶数が } 2 \text{ つではない} \end{cases}$$

これらの条件を満たす組 (p, q, r) で $p \leq q \leq r$ であるものは

$$p + q + r = 3 : \text{なし}$$

$$p + q + r = 6 : (1, 1, 4), (1, 2, 3)$$

$$p + q + r = 9 : (1, 3, 5)$$

$$p + q + r = 12 : (1, 5, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 5), (3, 3, 6), (3, 4, 5)$$

$$p + q + r = 15 : \text{なし}$$

$$p + q + r = 18 : \text{なし}$$

p, q, r の並べ替えは、 p, q, r のうち等しい組が1組あるときは3通り、すべて相異なるときは6通りであることに注意すると、全部で

$$3 \times 3 + 5 \times 6 = 39 \text{ 通り}$$

求める確率は

$$\frac{39}{216} = \frac{13}{72}$$