令和７年度入試（令和６年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜　前期日程
学部学科等	理（２科目選択）・工・都市デザイン学部
教科・科目名	数学／ 数学
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備　　考	

【理（２科目選択）・工・都市デザイン学部】

$\boxed{1}$ (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

と書けるが，この ℓ が点 $\mathrm{B}(-1,0)$ を通るから．$0 = f'(a)(-1-a) + f(a)$．故に

$$f'(a) = \frac{f(a)}{1+a} = a\sqrt{1-a^2}. \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$f(x) = x(x+1)\sqrt{1-x^2} = (x^2+x)\sqrt{1-x^2}$ の導関数は

$$f'(x) = (2x+1)\sqrt{1-x^2} + (x^2+x)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-3x^3-2x^2+2x+1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるので，②より $\dfrac{-3a^3-2a^2+2a+1}{\sqrt{1-a^2}} = f'(a) = a\sqrt{1-a^2}$．この等式は

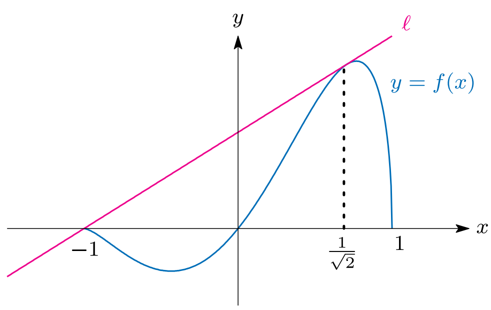
$$0 = 2a^3+2a^2-a-1 = (a+1)(2a^2-1)$$

と変形される．$0 < a < 1$ であるから $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ でなければならない．これを②と $f(x)$ の定義式に代入して，$f'(a) = \dfrac{1}{2}$，$f(a) = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ を得る．このことと①より，接線 ℓ の方程式は

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}(x+1).$$

答え： 接線 ℓ の方程式は $\dfrac{1}{2}(x+1)$.

(2) $y = f(x)$ と ℓ との交点を求める．$f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)$ とすると



$$(x+1)\left(2x\sqrt{1-x^2}-1\right) = 0$$

$x \neq -1$ であれば $2x\sqrt{1-x^2} = 1$ となり，両辺を 2 乗して

$$4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

を得る．すなわち $(2x^2-1)^2 = 0$．故に $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるが，$-1 < x < 0$ のときは，$f(x) < 0 < \dfrac{1}{2}(x+1)$ となるので，$-1 < x < 0$ の範囲では $y = f(x)$ と ℓ は交わらない．従って $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$．以上のことから，$y = f(x)$ と ℓ の交点は，$\bigl(-1,\ f(-1)\bigr)$ と $\bigl(1/\sqrt{2},\ f\bigl(1/\sqrt{2}\bigr)\bigr)$ の 2 点のみである．（$y = f(x)$ と ℓ を図示すれば上図のようになる）

よって $I = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,dx$ と置けば，接線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{\frac{1}{2}(x+1) - f(x)\right\} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - I = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} - I$$

と表される．$x = \cos\theta$ と置いて置換積分法を用れば

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x(x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\cdot(1+\cos\theta)\cdot|\sin\theta|\cdot(-\sin\theta)\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\theta\sin^2\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\Big[\sin^3\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{8}\Big[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{3}{32}\pi.
\end{aligned}
$$

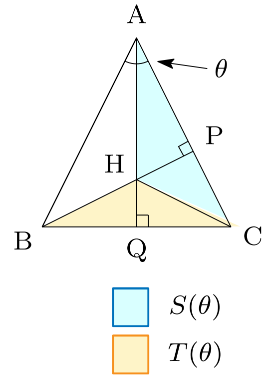
よって

$$
S = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} - I = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{3}{32}\pi = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{3}{32}\pi.
$$

答え： ℓ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{3}{8} + \dfrac{\sqrt{2}}{3} - \dfrac{3}{32}\pi$.

$\boxed{2}$ (1) 直線 BH が直線 AC と交わる点を P とし，直線 AH が直線 BC と交わる点を Q とする．このとき

$$\angle\mathrm{ABP} = \frac{\pi}{2} - \theta$$



となる．他方，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}\,(=1)$ であるような二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{PBC} + \angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(\pi - \theta).$$

従って

$$\angle\mathrm{PBC} + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{1}{2}(\pi - \theta). \qquad \text{故に} \quad \angle\mathrm{PBC} = \frac{\theta}{2}.$$

$\mathrm{HQ} = \mathrm{BQ}\cdot\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}$ ということになるので，

$$T(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{HQ} = \frac{1}{4}\cdot(\mathrm{BC})^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}.$$

余弦定理から $(\mathrm{BC})^2 = 1 + 1 - 2\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$ であるから

$$T(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\tan\frac{\theta}{2} \qquad \left(= \frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta} \right).$$

<u>答え： $T(\theta) = \dfrac{1}{2}(1-\cos\theta)\tan\dfrac{\theta}{2}$ 　または　 $T(\theta) = \dfrac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta}$ など．</u>

(2) (1)で示した通り，$(\mathrm{BC})^2 = 2 - 2\cos\theta$ であるから

$$\mathrm{QC} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\theta}.$$

従って

$$\mathrm{AQ} = \mathrm{QC}\cdot\tan\frac{\pi-\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\theta}\ \tan\frac{\pi-\theta}{2}.$$

よって $\triangle\mathrm{AQC}$ の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QC}\cdot\mathrm{AQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\theta}\right)^2\tan\frac{\pi-\theta}{2} = \frac{1}{4}(1-\cos\theta)\tan\frac{\pi-\theta}{2}$$

であり，$\triangle\mathrm{HQC}$ の面積は

$$\frac{1}{2}T(\theta) = \frac{1}{4}(1-\cos\theta)\tan\frac{\theta}{2}$$

となる．故に

$$S(\theta) = \triangle\mathrm{AQC}\text{ の面積} - \triangle\mathrm{HQC}\text{ の面積} = \frac{1}{4}(1-\cos\theta)\left(\tan\frac{\pi-\theta}{2} - \tan\frac{\theta}{2}\right).$$

他方，

$$\tan\frac{\pi-\theta}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

よって

$$\tan\frac{\pi-\theta}{2} - \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}.$$

$\sin\theta > 0$ であるので，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$，従って $t = \cos\theta$ と置けば，

$$S(\theta) = \frac{1}{4}(1-\cos\theta)\frac{2\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta - \cos^2\theta}{2\sin\theta} = \frac{t(1-t)}{2\sqrt{1-t^2}}.$$

従って，$0 < t < 1$ の範囲で，関数 $f(t) = \dfrac{t^2(1-t)^2}{4(1-t^2)} = \dfrac{t^2(1-t)}{4(1+t)}$ の最大値を求めればよい．$f(t)$ の導関数は

$$f'(t) = \frac{(2t-3t^2)(1+t)-(t^2-t^3)}{4(1+t)^2} = -\frac{t(t^2+t-1)}{2(1+t)^2}.$$

このことから，$t_0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ と置けば，$f(t)$ の増減は次の表のようになる：

t	0		t_0		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	最大	↘	

$t_0^2 = 1 - t_0$ であるから，$S(\theta)^2$ の最大値は

$$f(t_0) = \frac{t_0^2(1-t_0)}{4(1+t_0)} = \frac{(1-t_0)^2}{4(1+t_0)} = \frac{t_0^2-2t_0+1}{4(1+t_0)} = \frac{2-3t_0}{4(1+t_0)} = \frac{\frac{1}{2}\left(7-3\sqrt{5}\right)}{2\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{5\sqrt{5}-11}{8}.$$

答え： $S(\theta)^2$ の最大値は $\dfrac{5\sqrt{5}-11}{8}$.

(3)　$t = \cos\theta$ と置けば，t は $0 < t < 1$ の範囲を動き，(2) で示した通り $S(\theta) = \dfrac{t(1-t)}{2\sqrt{1-t^2}}$ となる．

$$\frac{t(1-t)}{2\sqrt{1-t^2}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{12} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

かつ $0 < t < 1$ であるような t の範囲を求めればよい．① の両辺を 2 乗して変形すれば，

$$12t^4 - 24t^3 + 13t^2 - 1 \geqq 0.$$

左辺は $(t-1)(12t^3-12t^2+t+1)$ と因数分解されるから

$$12t^3 - 12t^2 + t + 1 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

かつ $0 < t < 1$ であるような t の範囲を求めればよい．更に ② の左辺は

$$(2t-1)(6t^2-3t-1) = (2t-1)\left(t - \frac{3+\sqrt{33}}{12}\right)\left(t - \frac{3-\sqrt{33}}{12}\right)$$

のように変形（因数分解）される．$0 < t < 1$ の範囲で $t - \dfrac{3-\sqrt{33}}{12} > 0$ であるから，この範囲で ② が成り立つための必要十分条件は

$$(2t-1)\left(t - \frac{3+\sqrt{33}}{12}\right) \leqq 0$$

（かつ $0 < t < 1$）となることである．よって求める $t = \cos\theta$ の範囲は，$\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{3+\sqrt{33}}{12}$.

答え： 求める $\cos\theta$ の値の範囲は $\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{3+\sqrt{33}}{12}$.

$\boxed{3}$ (1) 1回ゲームをするとき，白玉を取り出す確率は $\dfrac{7}{10}$ であり，赤玉または青玉を取り出す事象は，白玉を取り出す事象の余事象であるから，求める確率は

$$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}.$$

答え： 1回ゲームをして，赤玉または青玉を取り出す確率は $\dfrac{3}{10}$.

(2) 1回ゲームをして白玉を取り出さない確率は $\dfrac{3}{10}$ であるから，5回ゲームをして5回とも白玉を取り出さない確率は $\left(\dfrac{3}{10}\right)^5$．5回ゲームをするとき，少なくとも1回白玉を取り出す事象は，5回とも白玉を取り出さない事象の余事象であるから，求める確率は

$$1-\left(\frac{3}{10}\right)^5=\frac{99757}{100000}$$

答え： 5回ゲームをして，少なくとも1回白玉を取り出す確率は $\dfrac{99757}{100000}$.

(3) 5回ゲームをして，得点が 500 点に満たない確率，すなわち，5回とも青玉を取り出さない確率は $\left(\dfrac{9}{10}\right)^5$ である．また，5回ゲームをして，各 k 回目だけに 500 点獲得する確率は

$$\left(\frac{9}{10}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{9^4}{10^5}$$

従って，得点が 500 点以上 1000 点未満である確率は ${}_5C_1\cdot\dfrac{9^4}{10^5}=5\cdot\dfrac{9^4}{10^5}=\dfrac{5\cdot 9^4}{10^5}$．以上のことから，得点が 1000 点より大きくなる確率は，

$$1-\frac{9^5}{10^5}-\frac{5\cdot 9^4}{10^5}=\frac{100000-9^5-5\cdot 9^4}{100000}=\frac{8146}{100000}=\frac{4073}{50000}.$$

答え： 5回ゲームをして，合計得点が 1000 点より大きい確率は $\dfrac{4073}{50000}$.